

Асимптотические формулы для фундаментальной системы решений обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка с коэффициентами — распределениями

А. М. Савчук, А. А. Шкаликов

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим систему n линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$(1.1) \quad \mathbf{y}' = \lambda \rho(x) \mathbf{B} \mathbf{y} + \mathbf{A}(x) \mathbf{y} + \mathbf{C}(x, \lambda) \mathbf{y}$$

на отрезке $x \in [0, 1]$ с комплексным параметром λ . Здесь

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))^t$$

— вектор-столбец, составленный из абсолютно непрерывных на $[0, 1]$ функций $y_j(x)$. В качестве множества значений параметра λ мы будем рассматривать область вида $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \lambda_0\}$. Мы будем считать, что коэффициенты системы (1.1) удовлетворяют следующим условиям.

- (i) Матрица \mathbf{B} является диагональной и постоянной: $\mathbf{B} = \text{diag}\{b_1, \dots, b_n\}$, а числа b_j — комплексными и ненулевыми.
- (ii) Все коэффициенты системы — функции $\rho(x)$, $a_{jk}(x)$ и $c_{jk}(x, \lambda)$ переменной x (при каждом фиксированном λ) мы будем считать суммируемыми по Лебегу на всем отрезке $[0, 1]$.
- (iii) Будем считать, что функция $\rho(x)$ вещественна и положительна почти всюду. Первообразную функции $\rho(x)$ будем обозначать через $p(x) := \int_0^x \rho(t) dt$.
- (iv) Будем предполагать, что при $|\lambda| \rightarrow \infty$ функции $c_{jk}(x, \lambda) = o(1)$, а именно, что $\int_0^1 |c_{jk}(x, \lambda)| dx \rightarrow 0$ для всех $1 \leq j, k \leq n$.

Отметим, что к системе вида (1.1) сводятся системы более общего вида.

Утверждение 1. Пусть матрица $\mathbf{V}(x)$ системы

$$(1.2) \quad \mathbf{u}' = \lambda \mathbf{V}(x) \mathbf{u} + \mathbf{A}_0(x) \mathbf{u} + \mathbf{C}_0(x, \lambda) \mathbf{u}$$

допускает представление $\mathbf{V}(x) = \mathbf{W}(x)(\rho(x)\mathbf{B})\mathbf{W}^{-1}(x)$, где матрицы $\mathbf{W}(x)$ и $\mathbf{W}^{-1}(x)$ абсолютно непрерывны, матрица \mathbf{B} постоянна и удовлетворяет условию (i), а функция $\rho(x)$ удовлетворяет условиям (ii) и (iii).¹ Далее, пусть матрицы $\mathbf{A}_0(x)$ и $\mathbf{C}_0(x, \lambda)$ удовлетворяют условиям (ii) и (iv). Тогда система (1.2) сводится к виду (1.1) заменой $\mathbf{u}(x) = \mathbf{W}(x)\mathbf{y}(x)$.

¹Таким образом матрица $\mathbf{V}(x)$ при каждом $x \in [0, 1]$ имеет n собственных значений, равных $\rho(x)b_j$, $1 \leq j \leq n$. Среди этих собственных значений допускаются кратные, но не допускаются жордановы клетки, т.е. мы требуем совпадения геометрической и алгебраической кратности для каждого собственного значения матрицы $\mathbf{V}(x)$.

Доказательство. Сделав замену $\mathbf{u}(x) = W(x)\mathbf{y}(x)$, получим

$$W'(x)\mathbf{y}(x) + W(x)\mathbf{y}'(x) = \lambda W(x)(\rho(x)B)\mathbf{y}(x) + A_0(x)W(x)\mathbf{y}(x) + C_0(x, \lambda)W(x)\mathbf{y}(x)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathbf{y}' = \lambda \rho(x)B\mathbf{y} + (W^{-1}(x)A_0(x)W(x) - W^{-1}(x)W'(x))\mathbf{y} + W^{-1}(x)C_0(x, \lambda)\mathbf{y}.$$

Положим $A(x) = W^{-1}(x)A_0(x)W(x) - W^{-1}(x)W'(x)$ и $C(x, \lambda) = W^{-1}(x)C_0(x, \lambda)$. Выполнение условий (i)–(iv) очевидно. \square

Матрицей фундаментальной системы решений или матрицей монодромии мы называем матрицу $Y(x, \lambda)$ ранга n , определенную при $x \in [0, 1]$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > \lambda_0$, каждый столбец которой $Y_k(x, \lambda)$ является решением системы (1.1). Таким образом, матрица Y удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$(1.3) \quad Y'(x, \lambda) = (\lambda \rho(x)B + A(x) + C(x, \lambda)) Y(x, \lambda)$$

при каждом фиксированном λ . Хорошо известно (см., например, [1]), что для определителя $\det Y(x, \lambda)$ выполнено равенство

$$(\det Y(x, \lambda))' = \text{tr}(\lambda \rho(x)B + A(x) + C(x, \lambda)) \det Y(x, \lambda),$$

так что из условия $\det Y(\xi, \lambda) \neq 0$ для некоторого $\xi \in [0, 1]$ следует, что $\det Y(x, \lambda) \neq 0$ при всех $x \in [0, 1]$.

Целью нашей работы будет получение асимптотических представлений для матрицы $Y(x, \lambda)$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Эта тематика является классической и имеет более чем столетнюю историю. Исследования этого вопроса берут начало с работ Биркгофа [2], [3], Перрона [4], Тамаркина [5], [6], Биркгофа и Лангера [7]. Хорошо известно, что подобные асимптотические результаты являются ключевыми для исследования спектральных свойств обыкновенных дифференциальных операторов порядка $n \geq 2$ (см., например, монографию Наймарка [8]). Систему (1.1) в случае $n = 2$, $b_1 = i$, $b_2 = -i$ (а также в случае $n = 2l$, $b_1 = \dots = b_l = i$, $b_{l+1} = \dots = b_n = -i$) в литературе называют *системой типа Дирака*. Именно к такому виду сводится уравнение второго порядка $-y'' + qy = \lambda^2 y$. Этот случай наиболее изучен и имеет свою специфику. Помимо асимптотических методов здесь работает метод *оператора преобразования* (см. классическую монографию [9] и новые работы [10], [11], где этот метод применяется в сингулярном случае). Причину можно объяснить тем, что в этом случае внедиагональная часть матрицы A антикоммутирует с матрицей B

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Наши построения в данной работе будут общими, кроме условий (i)–(iv), мы не будем делать никаких предположений о коэффициентах системы.

Задача об асимптотическом поведении матрицы $Y(x, \lambda)$ решений системы (1.2) впервые была рассмотрена в [5] (в [6] изменения по сравнению с [5] минимальны). При этом предполагалось, что после диагонализации матрица V имеет вид $V = V(x) = \text{diag}\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$ при соответствующих условиях на функции $\varphi_j(x)$. Элементы матрицы $V(x)$ предполагались дважды непрерывно дифференцируемыми, элементы матрицы $A_0(x)$ — непрерывно дифференцируемыми, а элементы матрицы $C_0(x, \lambda)$ — непрерывными. Впоследствии условия гладкости неоднократно ослаблялись. Необходимо отметить монографию Рапопорта [12], в которой были изучены асимптотические свойства системы вида (1.2) с вещественным параметром λ в предположении, что элементы

матрицы $V(x)$ лежат в пространстве $W_1^2[0, 1]$, элементы матрицы $A_0(x)$ — в пространстве $AC[0, 1]$, а $C_0(x, \lambda) = O(\lambda^{-1})$. Позднее, в работе [13], эти условия удалось слегка ослабить: $V(x) \in C^1[0, 1]$, $A_0(x) \in C[0, 1]$. Такого рода условия на гладкость являются стандартными для классической теории (см. также [8, глава II, §1]). По-видимому, наиболее общий на текущий момент случай разобран Рыхловым в [14], где, как и здесь, элементы матрицы V предполагаются абсолютно непрерывными, а элементы матриц A_0 и C_0 — суммируемыми по Лебегу. Отметим, что статья [14] осталась незамеченной специалистами и в работе [15] ее результаты были передоказаны, причем при более сильных условиях $V \in W_q^1[0, 1]$, $A_0, C_0 \in L_q[0, 1]$, $q > 1$, и в более слабой норме $\|\cdot\|_{L_q}$, $1/q + 1/q' = 1$, вместо $\|\cdot\|_{L_\infty}$. Для нас основным побудительным мотивом к исследованию систем вида (1.1) является то, что к ним сводятся линейные дифференциальные уравнения высокого порядка с коэффициентами — распределениями, что мы обсудим в части 2 данной работы. При этом элементы матриц A и C оказываются лишь суммируемыми на $[0, 1]$, что и вызывает необходимость ослабления стандартных требований гладкости. Кроме того, асимптотический анализ решений этих систем имеет ряд очень важных тонких моментов. Хорошо известно, что асимптотическое поведение матрицы $Y(x, \lambda)$ при $|\lambda| \rightarrow +\infty$ кардинальным образом зависит от множества Ω комплексной плоскости, содержащего параметр λ . Уже беглый взгляд на систему (1.1) позволяет сделать вывод, что главными членами асимптотики должны быть функции вида $\exp\{\lambda b_j p(x)\}$, асимптотическое поведение которых (рост, убывание или осцилляция) определяется знаком величины $\operatorname{Re}(\lambda b_j p(x))$. Учитывая неотрицательность функции p , видим, что асимптотику функции $Y(x, \lambda)$ надо искать в секторах $\arg \lambda \in (\alpha, \beta)$ в комплексной плоскости. При этом внутри сектора будет наблюдаться либо экспоненциальный рост, либо экспоненциальное убывание решений. Осцилляция возникает лишь в полуполосах комплексной плоскости на границе секторов, которые мы далее будем называть *критическими полуполосами*. Однако задачи об асимптотическом поведении собственных значений дифференциальных операторов высокого порядка или операторов, непосредственно порождаемых дифференциальным выражением (1.1), требуют знания асимптотики $Y(x, \lambda)$ именно в критических полуполосах. В силу этих причин мы не можем использовать результаты недавней работы Маламуда и Оридороги [16], в которой изучались системы вида (1.1) с $C(x, \lambda) = 0$, но асимптотические представления были получены в «суженных» секторах $\arg \lambda \in (\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$.

Результаты работы [14], в которой найдено асимптотическое поведение функции $Y(x, \lambda)$ в замкнутых секторах $\arg \lambda \in [\alpha, \beta]$, также оказались недостаточными для наших нужд. Причин к этому три, причем одна из них весьма существенна. Первая состоит в том, что такого рода асимптотические формулы требуют дополнительной работы. Зафиксируем для определенности луч $\arg \lambda = \alpha$ и предположим, что он является границей двух соседних секторов. Тогда, найденные в [14] асимптотики для матрицы решений $Y_+(x, \lambda)$, справедливы внутри сектора $\arg \lambda \in [\alpha, \beta]$, т.е. в половине критической полуполосы, направленной вдоль луча $\arg \lambda = \alpha$. Конечно, в другой половине этой полуполосы асимптотика решения также обеспечивается теоремой работы [14], но эту асимптотику будет иметь *уже другая* матрица решений $Y_-(x, \lambda)$. Таким образом, для получения асимптотики матрицы решений внутри всей критической полуполосы надо проводить «склейку» решений, изучать асимптотику матриц перехода и т.д. В нашей работе мы получим асимптотические формулы для $Y(x, \lambda)$ в «расширенных» секторах, полученных сдвигом исходных секторов вдоль продолжения биссектрисы. При этом мы допускаем сдвиг на произвольное расстояние, что позволяет охватить критические полуполосы.

Вторая (существенная) проблема состоит в выборе нормы для остаточных членов. Грубо говоря, эти члены имеют вид $\int_0^x e^{irt} a(t) dt$, где $r \rightarrow +\infty$, функция $a(t)$ суммируема на отрезке $[0, 1]$, а точку $x \in [0, 1]$, в которой ищется значение решения $Y(x, \lambda)$, можно считать фиксированной. Однако специфика метода последовательных приближений, который естественно используется при поиске решения системы (1.1), требует оценки величин вида $\int_0^\xi e^{irt} a(t) dt$, где $\xi \in [0, x]$. И здесь уже точку ξ фиксированной считать нельзя, необходимо оценивать какую-то функциональную норму остатка, зависящего от переменной ξ . Выбор этой нормы оказывается чрезвычайно важным. Для случая $a \in L_1[0, 1]$ естественной является норма $\|\cdot\|_{L_\infty}$ остатков (именно в этой норме получены оценки в работе [14]). Легко видеть, что потребовав дополнительную гладкость от функции $a(x)$ (выраженную, например, в требованиях на интегральный модуль непрерывности), мы получим улучшение оценок остатков в асимптотических формулах. Однако потребовав от функции a большей степени суммируемости, т.е. положив $a \in L_q[0, 1]$, $q > 1$, мы не добьемся улучшения оценок остатков. Для нас этот вопрос имеет большое значение, поскольку при сведении дифференциального уравнения высокого порядка с коэффициентами — распределениями к системе, элементы матрицы A оказываются квадратично суммируемыми. Использование здесь нормы $\|\cdot\|_{L_\infty}$ для оценивания остатков привело бы к серьезному ухудшению оценок в асимптотических формулах для собственных значений и собственных функций. Например, для оператора Штурма–Лиувилля вместо доказанной в [17] и [18] асимптотики $\sqrt{\lambda_n} = n + s_n$, где $\{s_n\}_1^\infty \in l_2$ (в слабо регулярном случае $\{s_n^2\}_1^\infty \in l_2$), мы получили бы лишь оценку $s_n = o(1)$.

Наконец, третья причина состоит в том, что в [14] найден лишь главный член асимптотики. Конечно, действуя методом последовательных приближений, выписать любое необходимое число слагаемых в асимптотических представлениях легко (в теореме 3 данной работы мы доходим до второго порядка малости в остатках). Проблема состоит в том, что при этом сами слагаемые асимптотического ряда становятся необозримыми (формально, для записи второго члена асимптотики нам потребуется $\sim n^3$ слагаемых). На самом деле, не все эти слагаемые имеют одинаковый порядок. Так, в [18], для случая оператора Штурма–Лиувилля $-y'' + qy$, когда $n = 2$, авторы показали, что основной вклад вносит лишь один асимптотический член, следующие три имеют подчиненный характер, а оставшиеся могут быть вообще занесены в остаток. Это, в частности, позволило доказать ключевую для решения обратной задачи теорему о производной в нуле нелинейного отображения $q \mapsto \{\lambda_n\}_1^\infty$ (здесь λ_n — собственные значения).

Мы сознательно ограничиваемся видом $\rho(x)B$ главного по порядку члена в правой части (1.1), хотя наш основной результат об асимптотике фундаментальной матрицы $Y(x, \lambda)$ естественным образом переносится на более общий случай $B = B(x) = \text{diag}\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$. Во-первых, и это для нас здесь главное, такое обобщение не нужно для изучения операторов высокого порядка с коэффициентами — распределениями. Во-вторых, при такой постановке задачи область $\Omega \ni \lambda$, в которой асимптотическое разложение справедливо, уже не является сектором и описывается неявно. Объединение таких областей может не покрывать область $|\lambda| > R$. Тем не менее, такая постановка задачи вполне содержательна. Она возникает, например, при изучении полиномиальных операторных пучков — дифференциальных уравнений высокого порядка, коэффициенты которых являются многочленами спектрального параметра λ . При доказательстве полноты системы собственных и присоединенных функций таких пучков может оказаться

достаточно знать асимптотику решения $Y(x, \lambda)$ на нескольких лучах в \mathbb{C} и общую оценку на рост $Y(x, \lambda)$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ — дальше работает теорема Фрагмена–Линделёфа (см. [19]). Эта тематика требует отдельного тщательного изучения и здесь мы ограничимся упомянутыми выше условиями.

При этом наши предположения о функции ρ являются довольно общими. В классической теории эту функцию считают абсолютно непрерывной (нам неизвестны работы, где это условие было бы ослаблено). Такое предположение является естественным для систем, возникающих при изучении дифференциальных операторов высокого порядка. Дело в том, что эти операторы сводятся к системам вида (1.2), а как видно из доказательства утверждения 1, диагонализация матрицы $V(x)$ возможна только при условии абсолютной непрерывности элементов этой матрицы. Отказ от гладкости или от положительности весовой функции ведет к появлению неинтегрируемых особенностей у элементов матрицы $A(x)$. Тем не менее, сделанное нами ослабление требований на функцию $\rho(x)$, существенно при изучении систем (1.1) как таковых (например, при изучении системы типа Дирака). С другой стороны, условие (iii) нельзя ослабить без существенного изменения итогового результата. Обнуление функции ρ на множестве положительной меры ведет к потере главного слагаемого в правой части (1.1). Смена знака $\rho(x)$ (точки смены знака называют точками поворота) равносильна смене знака спектрального параметра, т.е. переходу в другой сектор комплексной плоскости. Исследования систем со знакопеременной функцией $\rho(x)$ образуют отдельную тематику (Ознакомьтесь с основными направлениями исследований можно, например, в [20, 21, 22, 23]. Там же представлена обширная литература.)

Кратко прокомментируем другие условия (i)–(iv). Мы допускаем равенства среди чисел b_j , т.е. не требуем, чтобы b_j были попарно различными. Фактически это означает, что системе (1.1) удобно рассматривать блоками, объединяя в одну группу уравнения с совпадающими числами b_j . Такое обобщение не затрагивает показатели экспоненты в асимптотическом представлении решения $Y(x, \lambda)$, но меняет множители перед этими экспонентами — функции, зависящие только от x . В случае, когда числа b_j попарно различны эти функции выписываются явно, а в общей ситуации определяются как решения систем дифференциальных уравнений, не зависящих от λ . Напротив, допуская наличие жордановых клеток в структуре матрицы B , мы получим другую структуру главного асимптотического члена — упомянутые выше множители станут полиномами спектрального параметра. Этот случай мы здесь не рассматриваем. Условия о суммируемости коэффициентов системы (1.1) являются вполне естественными, хотя нам известны результаты о системе Дирака, когда повышение гладкости функции $a_{12}(x)$ дает возможность рассматривать случай обобщенной функции $a_{21}(x)$ (см. [24]). Требование убывания функций $c_{jk}(x, \lambda)$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ являются, очевидно, максимально общими (при рассмотрении систем, возникающих при изучении операторов с коэффициентами — распределениями и при изучении полиномиальных пучков, имеем $c_{jk}(x, \lambda) = O(|\lambda|^{-1})$). Конечно, повышение условий на гладкость функций $a_{ij}(x)$, открывающее путь к улучшению оценок остатков в асимптотике матрицы $Y(x, \lambda)$, должно сопровождаться усилением условий на убывание функций $c_{jk}(x, \lambda)$.

В завершение — о структуре работы. В разделе 2 мы говорим о нашем основном мотиве изучения систем (1.1) и (1.2) — о сведении дифференциальных выражений с коэффициентами — распределениями к такого вида системам. В третьей части работы проводим подготовительную работу. Основной результат статьи, теорема об асимптотическом представлении $Y(x, \lambda)$, помещен в четвертый параграф. Последний раздел посвящен примерам. В целом, результаты данной работы составляют базу для исследования спектральных

свойств дифференциальных операторов высокого порядка с коэффициентами — распределениями (под спектральными свойствами мы имеем в виду асимптотику собственных значений и собственных чисел, оценки на резольвенту оператора, теоремы о базисности Рисса и т.д.). Эти исследования будут проведены в следующих работах авторов.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ — РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

В этом параграфе мы обсудим вид дифференциальных выражений с коэффициентами — распределениями и сведение спектральных задач для таких выражений к системам вида (1.1). Дополнительные сведения читатель может найти в работе [25]. Наиболее общий вид (несамосопряженного) дифференциального выражения такого рода:

$$(2.1) \quad \tau(y) = \sum_{k,s=0}^m (\tau_{k,s}(x) y^{(m-k)}(x))^{m-s}.$$

Мы рассмотрим здесь случай только четного порядка $n = 2m$, нечетный случай имеет свою специфику. Функции $\tau_{k,s}$ будем считать комплекснозначными и потребуем выполнения условий ($\tau_0 := \tau_{0,0}$)

$$(2.2) \quad \frac{1}{\sqrt{|\tau_0|}}, \frac{1}{\sqrt{|\tau_0|}} \tau_{k,s}^{(-l)} \in L^2[0, 1], \quad 0 \leq k, s \leq m,$$

где $l = l_{ks} = \min\{k, s\}$, а под $f^{(-l)}$ мы понимаем l раз проинтегрированную функцию f . Отметим сразу, что выбор констант интегрирования не влияет на выполнение условий (2.2). Будем говорить, что дифференциальное выражение *приведено к нормальной форме*, если оно имеет вид

$$(2.3) \quad l(y) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} (\tau_k(x) y^{(m-k)}(x))^{(m-k)} + \\ + i \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k-1} [(\sigma_k(x) y^{(m-k-1)}(x))^{(m-k)} + (\sigma_k(x) y^{(m-k)}(x))^{(m-k-1)}].$$

Видно, что (2.1) сводится к (2.3), если все $\tau_{k,s} \equiv 0$ при $|k-s| \geq 2$, а $\tau_{k,k+1} \equiv \tau_{k+1,k}$. Условия (2.2) для дифференциальных выражений вида (2.3) принимают вид

$$(2.4) \quad \frac{1}{\sqrt{|\tau_0|}}, \frac{1}{\sqrt{|\tau_0|}} \tau_k^{(-k)}, \frac{1}{\sqrt{|\tau_0|}} \sigma_k^{(-k)} \in L^2[0, 1].$$

Отметим, что в работе [25] условия (2.2) и (2.4) предполагались выполненными лишь локально на интервале $(0, 1)$. Это позволяет корректно определять дифференциальные выражения, строить минимальный и максимальный операторы и т.д., но не достаточно для наших целей. Следующее утверждение повторяет теорему 1 работы [25]. Мы приведем его с доказательством.

Утверждение 2. *Для любого дифференциального выражения вида (2.1) найдется совпадающее с ним выражение вида (2.3) (под совпадением мы понимаем равенство в пространстве обобщенных функций $l(y) = \tau(y)$ для любой бесконечно гладкой функции y с носителем в $(0, 1)$).*

Доказательство. Договоримся называть индексом слагаемого $(\tau_{k,s}y^{(m-k)})^{(m-s)}$ число $k-s$. Рассмотрим вначале (единственное) слагаемое $(\tau_{m,0}y)^{(n)}$ с индексом m . В силу (2.2) $|\tau_0|^{-1/2}\tau_{m,0} \in L_2[0,1]$. Заменим в дифференциальном выражении $\tau(y)$ это слагаемое суммой

$$(\tau_{m,0}y)^{(n)} = (\tau'_{m,0}y)^{(m-1)} + (\tau_{m,0}y')^{(m-1)}$$

двух слагаемых с индексами $m-1$ и $m-2$. При этом условия (2.2) в преобразованном дифференциальном выражении также выполнены, поскольку для этих слагаемых $l=1$, а $|\tau_0|^{-1/2}(\tau'_{m,0})^{(-1)} \in L_2[0,1]$, $|\tau_0|^{-1/2}(\tau_{m,0})^{(-1)} \in L_2[0,1]$ (степень (-1) означает здесь взятие первообразной). В результате придем к дифференциальному выражению, в котором слагаемые с индексом m отсутствуют, а условия (2.2) выполнены. Пользуясь преобразованием

$$(\tau_{k,s}y^{(m-k)})^{(m-s)} = (\tau'_{k,s}y^{(m-k)})^{(m-s-1)} + (\tau_{k,s}y^{(m-k+1)})^{(m-s-1)}$$

точно также поступим с двумя слагаемыми индекса $m-1$ и т.д., пока не уничтожим все выражения с индексами $k-s \geq 2$. Легко видеть, что условия (2.2) при этом сохраняются. Затем, пользуясь тождеством

$$(\tau_{k,s}y^{(m-k)})^{(m-s)} = (\tau_{k,s}y^{(m-k-1)})^{(m-s+1)} - (\tau'_{k,s}y^{(m-k-1)})^{(m-s)}$$

(при этом преобразовании индекс выражения увеличивается), ликвидируем все слагаемые с индексами $k-s \leq -2$. В результате останутся выражения с индексами $-1, 0$ и 1 . Наконец, тождество

$$\begin{aligned} (\tau_{k+1,k}y^{(m-k-1)})^{(m-k)} + (\tau_{k,k+1}y^{(m-k)})^{(m-k-1)} &= \left(\frac{1}{2}(\tau_{k+1,k} + \tau_{k,k+1})y^{(m-k-1)} \right)^{(m-k)} + \\ &+ \left(\frac{1}{2}(\tau_{k+1,k} + \tau_{k,k+1})y^{(m-k)} \right)^{(m-k-1)} - \left(\frac{1}{2}(\tau_{k+1,k} + \tau_{k,k+1})'y^{(m-k-1)} \right)^{(m-k-1)}, \end{aligned}$$

где $k=0, \dots, m-1$, приводит дифференциальное выражение к виду (2.3). \square

Замечание 1. Несложно видеть, что сделанные преобразования не меняют старшего слагаемого $(\tau_0(x)y^{(m)})^{(m)}$.

Итак, далее будем работать с выражениями вида (2.3). Покажем, как от уравнения $l(y) = \lambda^n \varrho y$ перейти к системе вида (1.2) (мы предполагаем $\varrho \in L_1[0,1]$). Определим функции $\mathcal{T}_k = \tau_k^{(-k)}$ и $\mathcal{S}_k = \sigma_k^{(-k)}$ (выбор констант интегрирования произволен), $\varphi_k = \mathcal{T}_k + i\mathcal{S}_{k-1}$, $\psi_k = \mathcal{T}_k - i\mathcal{S}_{k-1}$. Теперь введем матрицу $F(x) = (f_{j,k}(x))_{j,k=1}^n$. Прежде всего, положим

$$f_{j,k}(x) = 0, \quad \text{если} \quad \begin{cases} 1 \leq j \leq m-1 \\ k \neq j+1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} j = m \\ k \geq m+1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} m+1 \leq j \leq n \\ k \geq m+2 \\ k \neq j+1, \end{cases}$$

$$f_{j,j+1} = \begin{cases} 1 & \text{при } j \neq m, \\ \tau_0^{-1} & \text{при } j = m, \end{cases}$$

так что матрица F приобретает вид

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m,1} & f_{m,2} & \dots & f_{m,m} & \tau_0^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ f_{m+1,1} & f_{m+1,2} & \dots & f_{m+1,m+1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1,1} & f_{n-1,2} & \dots & f_{n-1,m+1} & 0 & \dots & 0 & 1 \\ f_{n,1} & f_{n,2} & f_{n,3} & \dots & f_{n,m+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Определим строку $f_{m,k} = (-1)^{m-k} \varphi_{m+1-k} \tau_0^{-1}$, $1 \leq k \leq m$, и столбец $f_{j,m+1} = -\psi_{j-m} \tau_0^{-1}$, $m+1 \leq j \leq n$. Оставшиеся элементы матрицы F определим формулой

$$f_{m+k,m-j} = (-1)^{j+1} \varphi_{j+1} \psi_k \tau_0^{-1} + \chi_{j+k < m} (-1)^j C_{j+k+1}^k \left[\mathcal{T}_{j+k+1} + i \frac{j-k+1}{j+k+1} \mathcal{S}_{j+k} \right],$$

где $1 \leq k \leq m$, $0 \leq j \leq m-1$, C_{j+k+1}^k — биномиальный коэффициент, а число $\chi_{j+k < m}$ равно 1 при $j+k < m$ и 0 иначе. Отметим важный факт, который вытекает непосредственно из условий (2.2): функции $f_{j,k}(x)$ суммируемы на $[0, 1]$.

Теперь введем квазипроизводные² функции y , которые мы будем обозначать $y^{[j]}(x)$

$$(2.5) \quad y^{[0]} = y, \quad y^{[k]} = \frac{1}{f_{k,k+1}(x)} \left[(y^{[k-1]})' - \sum_{j=1}^k f_{k,j}(x) y^{[j-1]} \right], \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Сформулируем теорему 2 работы [25] (ее доказательство требует определенной технической работы и здесь не приводится).

Утверждение 3. Если $l(y)$ — дифференциальное выражение вида (2.3), то в новых обозначениях оно имеет вид

$$(2.6) \quad l(y) = (y^{[n-1]})' - \sum_{j=1}^n f_{n,j}(x) y^{[j-1]}.$$

Напомним, что наша цель состоит в исследовании уравнения $l(y) = \lambda^n \varrho(x) y$, где $\lambda^n \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр. Мы будем предполагать $\varrho(x) \in L_1[0, 1]$ (позднее мы наложим дополнительные ограничения). Заметим, что равенства (2.5) и (2.6) уже позволяют записать уравнение $l(y) = \lambda^n \varrho(x) y$ в виде системы n дифференциальных уравнений первого порядка относительно вектор-функции, составленной из квазипроизводных $y^{[j]}(x)$, $0 \leq j \leq n-1$. Матрицей этой системы, очевидно, является матрица $F(x)$ с единственным изменением — к ее элементу $f_{n,1}(x)$ добавляется слагаемое $(-1)^m \lambda^n \varrho(x)$. Удобнее, однако, осуществить переход к системе, положив $\mathbf{u}(x) = (u_j(x))_{j=1}^n$, где $u_j(x) := \lambda^{1-j} y^{[j-1]}(x)$.

²В различных источниках (см., например, [26], [27]), в том числе в работах авторов [17], [18], используются и другие определения квазипроизводных. Например, для случая оператора Штурма–Лиувилля, когда $n = 2$ и необходимо определить только первую квазипроизводную, удобно отбросить в определении множитель $1/f_{1,2}$. Такие различия следует учитывать при сравнении результатов об асимптотике решений.

Утверждение 4. Если $l(y)$ — дифференциальное выражение вида (2.3), то уравнение $l(y) = \lambda^n \varrho(x)y$ в наших обозначениях принимает вид

$$(2.7) \quad \mathbf{u}' = F(x, \lambda)\mathbf{u}, \quad \text{где } F(x, \lambda) = \left(f_{j,k}(x)\lambda^{k-j} + (-1)^m \lambda \varrho(x) \delta_j^n \delta_k^1 \right)_{j,k=1}^n.$$

Доказательство. Положим $\mathbf{v}(x) = (y^{[j-1]}(x))_{j=1}^n$. Тогда $\mathbf{v}' = (F(x) + (-1)^m \lambda^n E_{n,1})\mathbf{v}$, где через $E_{\alpha,\beta}$ мы обозначаем матрицу $E_{\alpha,\beta} = (\delta_j^\alpha \delta_k^\beta)_{j,k=1}^n$, δ_j^k — символ Кронекера. Согласно нашим обозначениям, $\mathbf{v} = \text{diag}\{1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1}\}\mathbf{u}$, а значит

$$\mathbf{u}' = \text{diag}\{1, \lambda^{-1}, \dots, \lambda^{1-n}\}(F(x) + (-1)^m \lambda^n E_{n,1}) \text{diag}\{1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1}\}\mathbf{u}.$$

Перемножив эти три матрицы, приходим к (2.7). □

Теперь заметим, что матрица $F(x, \lambda)$ в (2.7) раскладывается в сумму

$$\begin{aligned} F(x, \lambda) &= \lambda F_1(x) + F_0(x) + \lambda^{-1} F_{-1}(x) + \dots + \lambda^{1-n} F_{1-n}(x), \quad \text{где} \\ F_1(x) &= \sum_{j=1}^{m-1} E_{j,j+1} + \tau_0^{-1}(x) E_{m,m+1} + \sum_{j=m+1}^{n-1} E_{j,j+1} + (-1)^m \varrho(x) E_{n,1}, \\ F_0(x) &= f_{m,m}(x) E_{m,m} + f_{m+1,m+1}(x) E_{m+1,m+1}, \\ F_{-k}(x) &= \sum_{j=k+1}^n f_{j,j-k} E_{j,j-k}, \quad 1 \leq k \leq n-1. \end{aligned}$$

Таким образом, система (2.7) имеет вид (1.2) и, следуя утверждению 1, мы сведем ее к форме (1.1). При этом однако, нам придется наложить дополнительные условия на функции τ_0 и ϱ . Далее через ω_k , $0 \leq k \leq n-1$, обозначаем корни степени n из $(-1)^m$, занумерованные в порядке

$$\omega_k = \begin{cases} \epsilon_l^{\frac{2k+1}{2}}, & \text{если число } m \text{ нечетно,} \\ \epsilon_l^k, & \text{если } m \text{ четно,} \end{cases} \quad \epsilon_l = e^{\frac{i\pi l}{m}}.$$

Обозначим также $\rho(x) = \varrho^{\frac{1}{n}}(x) \tau_0^{-\frac{1}{n}}(x)$.

Теорема 1. Пусть дифференциальное выражение τ имеет вид (2.1), выполнены условия (2.2), а функция τ_0 абсолютно непрерывна и положительна на $[0, 1]$. Пусть функция ϱ также абсолютно непрерывна и положительна. Тогда уравнение $\tau(y) = \lambda^n \varrho(x)y$ можно свести к системе вида (1.1), с матрицей $B = \text{diag}\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}\}$. При этом все элементы матриц $A(x)$ и $C(x, \lambda)$ суммируемы на $[0, 1]$, а $\|C(\cdot, \lambda)\|_{L_1} = O(|\lambda|^{-1})$, $\lambda \rightarrow \infty$.

Доказательство. Большая часть работы уже проделана — мы показали, как свести уравнение $\tau(y) = \lambda^n \varrho(x)y$ к системе (2.7). Остается диагонализировать матрицу $F_1(x)$. Легко видеть, что характеристический многочлен этой матрицы равен $\chi(s) = s^n + (-1)^{m+1} \varrho(x) \tau^{-1}(x)$, а значит его корнями являются числа $s_k = \omega_k \rho(x)$. Заметим, что функция $\rho(x)$ положительна, а значит для любого $x \in [0, 1]$ числа s_k попарно различны. Это означает, что найдется матрица перехода $W(x)$ такая, что

$W^{-1}(x)F_1(x)W(x) = \rho(x) \operatorname{diag}\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}\}$. Опуская вычисления, найдем

$$(2.8) \quad W(x) = (w_{jk}(x))_{j,k=1}^n, \quad w_{jk}(x) = (\omega_{k-1}\rho(x))^{j-1} \cdot \begin{cases} 1, & j \leq m \\ \tau_0, & j > m, \end{cases}$$

$$W^{-1}(x) = (\tilde{w}_{jk}(x))_{j,k=1}^n, \quad \tilde{w}_{jk}(x) = \frac{1}{n}(\omega_{j-1}\rho(x))^{1-k} \cdot \begin{cases} 1, & k \leq m \\ \tau_0^{-1}, & k > m. \end{cases}$$

Таким образом, замена $\mathbf{y} = W^{-1}\mathbf{u}$ приводит систему (2.7) к виду

$$(2.9) \quad \mathbf{y}' = \lambda\rho(x)\mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{C}(x, \lambda)\mathbf{y}, \quad \text{где } \mathbf{B} = \operatorname{diag}\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}\}.$$

При этом,

$$\mathbf{A}(x) = -W^{-1}(x)W'(x) + W^{-1}(x)F_0(x)W(x), \quad \text{а } \mathbf{C}(x, \lambda) = W^{-1}(x) \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^{-k} F_{-k}(x)W(x).$$

Мы не будем приводить здесь формулы, связывающие элементы матрицы \mathbf{C} с функциями τ_k и σ_k , ввиду их громоздкости. Отметим лишь, что все элементы этой матрицы принадлежат пространству $L_1[0, 1]$ (это сразу же следует из абсолютной непрерывности функций $w(x, \lambda)$ и $\tilde{w}(x, \lambda)$ и суммируемости функций $f_{j,k}(x)$). Кроме того, $\mathbf{C}(x, \lambda) = O(|\lambda|^{-1})$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Матрицу $\mathbf{A}(x) = (a_{j,k}(x))_{j,k=1}^n$ мы, напротив, выпишем явно

$$(2.10) \quad a_{j,k}(x) = \frac{1}{n} \begin{cases} \frac{1}{1 - \epsilon_{k-j}} \left(\frac{\varrho'(x)}{\varrho(x)} - \epsilon_{k-j}^m \frac{\tau_0'(x)}{\tau_0(x)} \right) + \frac{\epsilon_{k-j}^m}{\tau_0(x)} (\varphi_1(x)\epsilon_{j-k} - \psi_1(x)), & j \neq k, \\ \frac{1-n}{2} (\ln \varrho(x))' - \frac{1}{2} (\ln \tau_0(x))' + \frac{2i\sigma_0(x)}{\tau_0(x)}, & j = k. \end{cases}$$

□

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Вначале мы докажем теорему существования и единственности для системы $n \times n$ $\mathbf{y}' = \mathbf{T}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x)$ с начальным условием $\mathbf{y}(\xi) = \mathbf{y}^0$ и суммируемыми вектор-функцией $\mathbf{f}(x)$ и матриц-функцией $\mathbf{T}(x)$. Эта теорема, конечно, хорошо известна (хотя обычно требуют непрерывность $\mathbf{f}(x)$ и $\mathbf{T}(x)$). Нам здесь будут нужны, в первую очередь, оценки на норму решения и на норму разности решений при варьировании ξ , \mathbf{f} и \mathbf{T} . Положим

$$\|\mathbf{y}\|_{AC} := \sum_{j=1}^n \int_0^1 |y_j(x)| + |y_j'(x)| dx, \quad \|\mathbf{y}\|_{\xi} := \sum_{j=1}^n |y_j(\xi)| + \int_0^1 |y_j'(x)| dx,$$

$$\|\mathbf{y}\|_C = \|\mathbf{y}\|_{L_{\infty}} := \max_{\substack{1 \leq j \leq n \\ x \in [0,1]}} |y_j(x)|, \quad \|\mathbf{y}\|_{L_p} = \left(\sum_{j=1}^n \int_0^1 |y_j(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

и сразу же заметим, что $\|\mathbf{y}\|_{AC} \leq 2\|\mathbf{y}\|_{\xi}$ для любого $\xi \in [0, 1]$ и $\|\mathbf{y}\|_C \leq \|\mathbf{y}\|_{AC}$. Для фиксированного вектора \mathbf{y} положим $|\mathbf{y}| := \max_{1 \leq j \leq n} |y_j|$. Обозначим через $|\mathbf{f}(x)| := \max_{1 \leq j \leq n} |f_j(x)|$ для произвольной вектор-функции $\mathbf{f}(x)$ и через $|\mathbf{T}(x)| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^n |t_{jk}(x)|$ для произвольной матриц-функции $\mathbf{T}(x)$. Для краткости будем писать $\mathbf{f} \in L_1[0, 1]$ или $\mathbf{T} \in L_1[0, 1]$

в том смысле, что все $f_j(x) \in L_1[0, 1]$ или $t_{jk}(x) \in L_1[0, 1]$. Определим также матричные нормы

$$\|T(x)\|_{L_p} = \sum_{jk=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \int_0^1 |t_{jk}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|T(x)\|_C = \max_{1 \leq j, k \leq n} |t_{jk}(x)|,$$

$$\|T(x)\|_{AC} = \|T(x)\|_{L_1} + \|T'(x)\|_{L_1}.$$

Утверждение 5. Пусть матрица T системы

$$(3.1) \quad \mathbf{z}' = T(x)\mathbf{z} + \mathbf{f}(x), \quad x \in [0, 1], \quad \mathbf{z}(\xi) = \mathbf{z}^0, \quad \mathbf{f} \in L_1[0, 1],$$

размера $n \times n$ лежит в $L_1[0, 1]$. Тогда система (3.1) имеет единственное решение $\mathbf{z}(x) \in AC[0, 1]$. При этом

$$(3.2) \quad \|\mathbf{z}\|_{AC} \leq (1 + 2\tau e^\tau) \|\mathbf{g}\|_{AC}, \quad u \quad |\mathbf{z}(x)| \leq e^{\tau(x)} \|\mathbf{g}\|_C,$$

где

$$\tau(x) = \left| \int_\xi^x |T(t)| dt \right|, \quad \tau = \tau(1), \quad a \quad \mathbf{g}(x) = \mathbf{z}^0 + \int_\xi^x \mathbf{f}(t) dt.$$

Доказательство. Запишем систему (3.1) в интегральном виде

$$\mathbf{z}(x) = \mathbf{g}(x) + (T\mathbf{z})(x), \quad \text{где } (T\mathbf{z})(x) = \int_\xi^x T(t)\mathbf{z}(t) dt$$

и, прежде всего, докажем оценку

$$(3.3) \quad |(T^l \mathbf{z})(x)| \leq \frac{\tau^l(x)}{l!} \|\mathbf{z}\|_C, \quad l \geq 1.$$

Легко видеть, что

$$|(T\mathbf{z})(x)| \leq \tau(x) \|\mathbf{z}\|_C.$$

Далее проведем доказательство по индукции. Пусть оценка уже получена для $l-1$, тогда

$$(3.4) \quad |(T^l \mathbf{z})(x)| \leq \left| \int_\xi^x |T(t)| \cdot |(T^{l-1} \mathbf{z})(t)| dt \right| \leq \|\mathbf{z}\|_C \left| \int_\xi^x |T(t)| \frac{\tau^{l-1}(t)}{(l-1)!} dt \right| =$$

$$= \|\mathbf{z}\|_C \left| \int_\xi^x \frac{\tau^{l-1}(t)}{(l-1)!} d\tau(t) \right| = \frac{\tau^l(x)}{l!} \|\mathbf{z}\|_C$$

и оценка (3.3) доказана. Отсюда следует другая оценка

$$\|T^l \mathbf{z}\|_{AC} \leq 2\|T^l \mathbf{z}\|_\xi \leq 2 \int_0^1 |T(x)| \cdot |(T^{l-1} \mathbf{z})(x)| dx \leq 2\|\mathbf{z}\|_C \int_0^1 |T(x)| \frac{\tau^{l-1}(x)}{(l-1)!} dx \leq \frac{2\tau^l}{(l-1)!} \|\mathbf{z}\|_C.$$

В частности,

$$(3.5) \quad \|T^l\|_{AC} \leq \frac{2\tau^l}{(l-1)!}.$$

Теперь решение уравнения (3.1) мы можем записать в виде ряда

$$(3.6) \quad \mathbf{z}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} (T^l \mathbf{g})(x),$$

причем в силу (3.3) и (3.5) этот ряд сходится и в каждой точке $x \in [0, 1]$, и по норме пространства $AC[0, 1]$. При этом

$$|z(x)| \leq \sum_{l=0}^{\infty} |(T^l \mathbf{g})(x)| \leq \|\mathbf{g}\|_C \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\tau^l(x)}{l!} \leq \|\mathbf{g}\|_C e^{\tau(x)},$$

$$\|\mathbf{z}\|_{AC} \leq \sum_{l=0}^{\infty} \|T^l \mathbf{g}\|_{AC} \leq \|\mathbf{g}\|_{AC} \left(1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\tau^l}{(l-1)!} \right) = \|\mathbf{g}\|_{AC} (1 + 2\tau e^{\tau}).$$

Единственность решения доказывается классически: если \mathbf{z} и $\tilde{\mathbf{z}}$ — два решения системы (3.1), то

$$\mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}} = T(\mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}}) = \dots = T^l(\mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}}),$$

откуда $\mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}} = 0$, поскольку оператор T^l является сжатием в пространстве $AC[0, 1]$ при достаточно большом l . \square

Замечание 2. При фиксированных ξ , \mathbf{z}^0 и $\mathbf{f} \in L_1[0, 1]$, решение уравнения (3.1) непрерывно зависит от матрицы $T \in L_1[0, 1]$ в следующем смысле. Если $\tilde{\mathbf{z}}$ — решение начальной задачи (3.1) с теми же ξ , \mathbf{z}^0 и \mathbf{f} , но с другой матрицей \tilde{T} , то

$$(3.7) \quad \|\mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}}\|_{AC} \leq 2\|T - \tilde{T}\|_{L_1} (1 + 2\tau e^{\tau}) e^{\tilde{\tau}} \|\mathbf{g}\|_{AC}.$$

Доказательство. Положим $\mathbf{u}(x) = \mathbf{z}(x) - \tilde{\mathbf{z}}(x)$, эта функция абсолютно непрерывна, равна нулю в точке ξ и удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{u}' = T(x)\mathbf{u} + (T(x) - \tilde{T}(x))\tilde{\mathbf{z}}(x).$$

Согласно (3.2),

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{AC} &\leq (1 + 2\tau e^{\tau}) \left\| \int_{\xi}^x (T(t) - \tilde{T}(t))\tilde{\mathbf{z}}(t) dt \right\|_{AC} \leq 2(1 + 2\tau e^{\tau}) \left\| \int_{\xi}^x (T(t) - \tilde{T}(t))\tilde{\mathbf{z}}(t) dt \right\|_{\xi} = \\ &= 2(1 + 2\tau e^{\tau}) \int_0^1 \left| (T(x) - \tilde{T}(x))\tilde{\mathbf{z}}(x) \right| dx \leq 2(1 + 2\tau e^{\tau}) \|T - \tilde{T}\|_{L_1} \|\tilde{\mathbf{z}}\|_C \leq \\ &\leq 2\|T - \tilde{T}\|_{L_1} (1 + 2\tau e^{\tau}) e^{\tilde{\tau}} \|\mathbf{g}\|_{AC}. \end{aligned}$$

\square

Замечание 3. Пусть матрица T , функция \mathbf{f} и начальное значение \mathbf{z}^0 зависят от параметра λ , меняющегося в области $D \subset \mathbb{C}$. Предположим, что функции $z_j^0(\lambda)$ и отображения $\lambda \mapsto f_j(\cdot, \lambda)$, $\lambda \mapsto t_{jk}(\cdot, \lambda)$ из D в $L_1[0, 1]$, $1 \leq j, k \leq n$, голоморфны по λ . Тогда и решение (3.1), отображение $\lambda \mapsto \mathbf{z}(\cdot, \lambda)$ из D в $(AC[0, 1])^n$, голоморфно по $\lambda \in D$.

Доказательство. Голоморфность функции $\mathbf{g}(\cdot, \lambda)$ в $(AC[0, 1])^n$ следует из представления $\mathbf{g}(\cdot, \lambda) = \mathbf{z}^0(\lambda) + \int \mathbf{f}(\cdot, \lambda)$. Голоморфность функции $(T\mathbf{g})(\cdot, \lambda)$ следует из определения оператора T . Голоморфность функций $(T^m \mathbf{g})(\cdot, \lambda)$ устанавливается по индукции. Поскольку функция $\tau(\lambda)$ непрерывна по $\lambda \in D$, то она ограничена на каждом компакте. Тогда оценки (3.5) гарантируют равномерную на этом компакте сходимость ряда (3.6). Теперь голоморфность функции $\mathbf{z}(\cdot, \lambda)$ следует из теоремы Вейерштрасса³. \square

³Мы даем здесь краткое доказательство, подробности см., например, в [28, Глава 12].

Следствие 1. При каждом фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > \lambda_0$, система (1.1) после добавления начального условия $\mathbf{y}(\xi, \lambda) = \mathbf{y}^0(\lambda)$ имеет единственное решение в классе абсолютно непрерывных на $[0, 1]$ функций. При этом АС-норма этого решения допускает оценку

$$\|\mathbf{y}\|_{\text{АС}} \leq (1 + 2\tau e^\tau) |\mathbf{y}^0(\lambda)|, \quad \text{где } \tau = |\lambda| \|\rho\|_{L_1} \max_{1 \leq j \leq n} |b_j| + a + c, \quad |\mathbf{y}^0(\lambda)| = \max_{1 \leq j \leq n} |y_j^0(\lambda)|,$$

при всех $|\lambda| > \max\{a + c, \lambda_0\}$. Пусть все функции $y_j^0(\lambda)$, $1 \leq j \leq n$, голоморфны по $\lambda \in \{|\lambda| > \lambda_0\}$, так же, как и отображения $\lambda \mapsto c_{jk}(\cdot, \lambda)$, $1 \leq j, k \leq n$, из области $\lambda \in \{|\lambda| > \lambda_0\}$ в $L_1[0, 1]$. Тогда голоморфно и решение, отображение $\lambda \mapsto \mathbf{y}(\cdot, \lambda)$ из $\{|\lambda| > \lambda_0\}$ в $(\text{АС}[0, 1])^n$.

Определим семейство секторов $\Gamma_\kappa = \{\lambda : \arg \lambda \in (\alpha_{\kappa-1}, \alpha_\kappa)\}$, $\kappa = 1, \dots, J$. Если все числа b_j совпадают, то наше семейство будет состоять ровно из одного сектора $\Gamma_1 = \mathbb{C}$. В противном случае зафиксируем два произвольных индекса $1 \leq k < l \leq n$ таких, что $b_k \neq b_l$, и рассмотрим уравнение

$$(3.8) \quad \operatorname{Re}(b_k \lambda) = \operatorname{Re}(b_l \lambda) \iff \operatorname{Re}((b_k - b_l)\lambda) = 0.$$

Легко видеть, что решением этого уравнения является некоторая прямая, проходящая через начало координат. Общее число уравнений вида (3.8) равно $n(n-1)/2$, так что в результате получаем разбиение комплексной плоскости на $1 \leq J \leq (n^2 - n)$ секторов. При $J > 1$ каждый сектор ограничен двумя полярными лучами, которые мы занумеруем по возрастанию аргумента $\alpha_0 \leq 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{J-1} < \alpha_J = \alpha_0 + 2\pi$.

Зафиксируем некоторый номер $\kappa \leq J$, рассмотрим сектор Γ_κ и найдем в этом секторе решение уравнения (1.3), имеющее определенное асимптотическое представление. Более того, мы покажем, что решение с таким асимптотическим свойством определено не только в Γ_κ , но и в более широком секторе $\tilde{\Gamma}_\kappa$. Мы определим сектор $\tilde{\Gamma}_\kappa$ как результат параллельного переноса сектора Γ_κ вдоль его биссектрисы (точнее, вдоль продолжения этой биссектрисы за пределы Γ_κ):

$$\tilde{\Gamma}_\kappa = \tilde{\Gamma}_\kappa(r) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda + r e^{\frac{i}{2}(\alpha_{\kappa-1} + \alpha_\kappa)} \in \Gamma_\kappa\},$$

где $r > 0$ фиксировано. В случае, когда $J = 1$ и $\Gamma_1 = \mathbb{C}$ положим $\tilde{\Gamma}_1 = \mathbb{C}$.

Заметим, что для любой пары индексов $1 \leq k, l \leq n$ таких, что $b_k \neq b_l$, в секторе Γ_κ выполнено следующее свойство: либо $\operatorname{Re}(b_k \lambda) > \operatorname{Re}(b_l \lambda)$ для всех $\lambda \in \Gamma_\kappa$, либо $\operatorname{Re}(b_k \lambda) < \operatorname{Re}(b_l \lambda)$ для всех $\lambda \in \Gamma_\kappa$. Пусть ν — число различных чисел b_j . Перенумеруем уравнения системы (1.1) так, что

$$(3.9) \quad \operatorname{Re}(b_1 \lambda) = \operatorname{Re}(b_2 \lambda) = \dots = \operatorname{Re}(b_{n_1} \lambda) > \operatorname{Re}(b_{n_1+1} \lambda) = \dots = \operatorname{Re}(b_{n_1+n_2} \lambda) > \dots \\ \dots > \operatorname{Re}(b_{n_1+\dots+n_{\nu-1}+1} \lambda) = \dots = \operatorname{Re}(b_n \lambda) \quad \forall \lambda \in \Gamma_\kappa, \quad n = n_1 + n_2 + \dots + n_\nu.$$

Удобно будет обозначить $b_1 = \dots = b_{n_1} =: \beta_1$, $b_{n_1+1} = \dots = b_{n_1+n_2} =: \beta_2$ и т.д., перейдя таким образом, к набору $\beta_1, \dots, \beta_\nu$ попарно различных чисел. В секторе $\tilde{\Gamma}_\kappa$ неравенства (3.9), естественно не выполнены (за исключением случая $\tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1 = \mathbb{C}$).

Лемма 1. Найдутся такие числа $h > 0$ и $\lambda_0 > 0$ (они зависят от величины сдвига r), что в области $\mathfrak{D}_{\kappa, \lambda_0} := \{\lambda \in \tilde{\Gamma}_\kappa, |\lambda| > \lambda_0\}$ справедливы неравенства

$$(3.10) \quad \operatorname{Re}((b_k - b_l)\lambda) > -h, \quad 1 \leq k < l \leq n; \quad \operatorname{Re}((\beta_k - \beta_l)\lambda) > -h, \quad 1 \leq k < l \leq \nu.$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать неравенства для чисел b_j . Прежде всего, заметим, что сектор $\tilde{\Gamma}_\kappa$ ограничен лучом ℓ_1 вида $\lambda = -re^{\frac{i}{2}(\alpha_{\kappa-1} + \alpha_\kappa)} + te^{i\alpha_{\kappa-1}}$, $t > 0$, параллельным лучу $\arg \lambda = \alpha_{\kappa-1}$, и лучом ℓ_2 вида $\lambda = -re^{\frac{i}{2}(\alpha_{\kappa-1} + \alpha_\kappa)} + te^{i\alpha_\kappa}$, $t > 0$, параллельным лучу $\arg \lambda = \alpha_\kappa$. Очевидно, что луч ℓ вида $\lambda = a + te^{i\varphi}$, $t > 0$, начиная с некоторого t , не попадает в сектор $\Gamma = \{\lambda : \arg \lambda \in (\varphi_0, \varphi_1)\}$, если $\varphi \notin [\varphi_0, \varphi_1]$. Таким образом, луч ℓ_1 лежит, начиная с некоторого $t = t_1$, либо в секторе Γ_κ , либо в соседнем секторе $\Gamma_{\kappa-1}$ (мы считаем, что $\Gamma_0 := \Gamma_J$, а $\Gamma_{J+1} := \Gamma_1$). Первое невозможно, поскольку по определению $\tilde{\Gamma}_\kappa \supset \Gamma_\kappa$. Аналогично, луч ℓ_2 лежит, начиная с некоторого $t = t_2$, в секторе $\Gamma_{\kappa+1}$. Выбрав число λ_0 равным максимуму из $|\ell_1(t_1)|$ и $|\ell_2(t_2)|$, получим, что область D_{κ, λ_0} вложена в объединение секторов $\Gamma_{\kappa-1} \cup \overline{\Gamma_\kappa} \cup \Gamma_{\kappa+1}$.

Зафиксируем теперь произвольную пару индексов $1 \leq k < l \leq n$ и найдем такое число h_{kl} , что неравенство $\operatorname{Re}((b_k - b_l)\lambda) > -h_{kl}$ выполнено всюду в D_{κ, λ_0} . Для этого рассмотрим \mathbb{R} -линейную функцию $w_{kl}(\lambda) = \operatorname{Re}((b_k - b_l)\lambda)$. Будем считать, что $b_k \neq b_l$, иначе мы положим $h_{kl} = 0$. В силу (3.9) эта функция положительна при $\lambda \in \Gamma_\kappa$. Возможны четыре случая: эта функция может оказаться положительной и в $\Gamma_{\kappa-1}$, и в $\Gamma_{\kappa+1}$. В этом случае мы положим $h_{kl} = 0$ и придем к неравенству $w_{kl}(\lambda) > -h_{kl}$ при $\lambda \in D_{\kappa, \lambda_0}$. Функция w_{kl} может оказаться положительной в $\Gamma_{\kappa-1}$ и в Γ_κ , но равной нулю на луче $\arg \lambda = \alpha_\kappa$. Тогда w_{kl} отрицательна в $\Gamma_{\kappa+1}$, а так как луч ℓ_2 параллелен лучу $\arg \lambda = \alpha_\kappa$, то w_{kl} постоянна на ℓ_2 . В этом случае мы положим $h_{kl} = -w_{kl}|_{\ell_2}$. Тогда на каждом параллельном ℓ_2 луче, лежащем в полосе между лучами ℓ_2 и $\arg \lambda = \alpha_\kappa$, функция w_{kl} также постоянна и принимает значения в промежутке $(-h_{kl}, 0)$. Отсюда следует неравенство $w_{kl}(\lambda) > -h_{kl}$ в D_{κ, λ_0} . Функция w_{kl} может оказаться положительной в Γ_κ и в $\Gamma_{\kappa+1}$, но отрицательной в $\Gamma_{\kappa-1}$ — эта ситуация аналогична предыдущей, мы положим $h_{kl} = -w_{kl}|_{\ell_1}$ и вновь придем к неравенству $w_{kl}(\lambda) > -h_{kl}$ всюду в D_{κ, λ_0} . Наконец, возможен случай, когда w_{kl} положительна только в секторе Γ_κ , а в секторах $\Gamma_{\kappa-1}$ и $\Gamma_{\kappa+1}$ отрицательна. Тогда $w_{kl} = 0$ и на луче $\arg \lambda = \alpha_\kappa$, и на луче $\arg \lambda = \alpha_{\kappa-1}$. В силу линейности w_{kl} это возможно только тогда, когда эти лучи параллельны. Поскольку $\alpha_\kappa \neq \alpha_{\kappa-1}$, то $\alpha_\kappa = \alpha_{\kappa-1} + \pi$. В этом случае сектор Γ_κ превращается в полуплоскость, а значит лучи ℓ_1 и ℓ_2 составляют одну прямую. Положим $h_{kl} = -w_{kl}|_{\ell_1} = -w_{kl}|_{\ell_2}$ и вновь получим $w_{kl}(\lambda) > -h_{kl}$ в D_{κ, λ_0} . Остается обозначить $h = \max_{1 \leq k < l \leq n} h_{kl}$. \square

Зафиксируем некоторый сектор $\tilde{\Gamma}_\kappa$ и перенумеруем уравнения системы (1.1) так, чтобы в Γ_κ были выполнены неравенства (3.9). Будем далее считать, что $\lambda \in \mathfrak{D}_{\kappa, \lambda_0}$. Для краткости будем обозначать эту область \mathfrak{D} . Через h будем обозначать число, определенное в лемме 1. Таким образом, для любого $\lambda \in \mathfrak{D}$ справедливы неравенства (3.10).

Начнем с поиска главного члена в асимптотическом представлении для $Y(x, \lambda)$ при $\mathfrak{D} \ni \lambda \rightarrow \infty$. Для этого мы отбросим в правой части (1.3) слагаемое $C(x, \lambda)Y(x, \lambda)$. Далее, матрицу $A(x)$ представим в виде

$$A(x) = D(x) + (A(x) - D(x)), \quad \text{где } D(x) = \begin{cases} a_{jk}(x), & \text{если } b_j = b_k, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и слагаемое $(A(x) - D(x))Y(x, \lambda)$ в правой части (1.3) также отбросим. В результате мы придем к матричному дифференциальному уравнению

$$(3.11) \quad Y^0(x, \lambda)' = \lambda \rho(x) B Y^0(x, \lambda) + D(x) Y^0(x, \lambda),$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & b_n \end{pmatrix}, \quad D(x) = \begin{pmatrix} D_1(x) & O & O & \dots & O \\ O & D_2(x) & O & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & \dots & \dots & O & O & D_\nu(x) \end{pmatrix}$$

(матрицы $D_j(x)$ имеют размер $n_j \times n_j$), которое мы будем называть *модельным уравнением* для основного уравнения (1.3).

Утверждение 6. *Решение $Y^0(x, \lambda)$ уравнения (3.11) с начальным условием $Y^0(0, \lambda) = I$ имеет вид*

$$(3.12) \quad Y^0(x, \lambda) = \mathcal{E}(x, \lambda) \cdot M(x), \quad \mathcal{E}(x, \lambda) = \text{diag}\{e^{b_1 \lambda p(x)}, \dots, e^{b_n \lambda p(x)}\},$$

где $p(x) = \int_0^x \rho(t) dt$, матрицы $M_j(x)$, $1 \leq j \leq \nu$, имеют размер $n_j \times n_j$ каждая, а

$$M(x) = \begin{pmatrix} M_1(x) & O & O & \dots & O \\ O & M_2(x) & O & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & \dots & \dots & O & O & M_\nu(x) \end{pmatrix}.$$

Каждая из матриц $M_j(x)$ является решением уравнения $M_j'(x) = D_j(x)M_j(x)$ с начальным условием $M_j(0) = I$.

Доказательство. По определению, $D(x)$ — блок-диагональная часть матрицы $A(x)$, состоящая из ν квадратных блоков размера $n_j \times n_j$, $1 \leq j \leq \nu$, каждый. При этом в системе (3.12) каждому блоку матрицы D отвечает одно и то же число b_j , расположенное на диагонали матрицы B . Таким образом, система (3.11) распадается на ν не связанных между собой систем

$$Y_j'(x, \lambda) = \lambda b_j \rho(x) Y_j(x, \lambda) + D_j(x) Y_j(x, \lambda), \quad Y_j(0, \lambda) = I.$$

Прямой подстановкой убеждаемся, что $Y_j(x, \lambda) = \exp\{\lambda b_j p(x)\} M_j(x)$. □

Замечание 4. В общем случае матрицу $M(x)$ нельзя выразить явно через элементы матрицы $A(x)$, однако если матрица $D_j(x)$ является диагональной, т.е. $D_j(x) = \text{diag}\{a_{k_j, k_j}(x), \dots, a_{k_j+n_j, k_j+n_j}(x)\}$, где $k_j = n_1 + \dots + n_{j-1} + 1$, то $M_j(x)$ также диагональна и равна

$$M_j(x) = \text{diag} \left\{ \exp \left\{ \int_0^x a_{k_j, k_j}(t) dt \right\}, \dots, \exp \left\{ \int_0^x a_{k_j+n_j, k_j+n_j}(t) dt \right\} \right\}.$$

В частности, это так, если все b_j , $1 \leq j \leq n$, попарно различны.

Замечание 5. Матрица $M(x)$ коммутирует с матрицами B и $\mathcal{E}(x, \lambda)$.

Напомним, что $a = \|A(x)\|_{L_1}$, $\gamma(\lambda) = \|C(\cdot, \lambda)\|_{L_1}$, $c = \max_{|\lambda| > \lambda_0} \gamma(\lambda)$.

Лемма 2. Матрица $M(x)$ допускает оценку $\|M(x)\|_C \leq e^a$. Для любого $x \in [0, 1]$ она обратима, обратная матрица удовлетворяет уравнению $(M^{-1}(x))' = -M^{-1}(x)D(x)$ с начальным условием $M(0) = I$ и так же допускает оценку $\|M^{-1}(x)\|_C \leq e^a$.

Доказательство. Оценка для матрицы M следует из (3.2). Невырожденность матрицы $M(x)$ доказывается обычным образом: ее определитель удовлетворяет уравнению $(\det M(x))' = \operatorname{tr} D(x) \cdot \det M(x)$ и начальному условию $\det M(0) = 1$, а значит отличен от нуля на всем отрезке $[0, 1]$. Дифференцируя тождество $I = M^{-1}(x)M(x)$, учитывая $M'(x) = D(x)M(x)$ и домножая справа на $M^{-1}(x)$, получим $(M^{-1}(x))' = -M^{-1}(x)D(x)$. Переходя к сопряженным матрицам, согласно (3.2), получим оценку $\|(M^{-1})^*\|_C \leq e^a$, эквивалентную искомой. \square

Определим матрицы

$$Q(x) = M^{-1}(x)(A(x) - D(x))M(x), \quad R(x, \lambda) = M^{-1}(x)C(x, \lambda)M(x),$$

элементы которых мы будем обозначать $q_{jk}(x)$ и $r_{jk}(x, \lambda)$. Сразу же заметим, что

$$(3.13) \quad \|Q(x)\|_{L_1} \leq ae^{2a} \quad \text{и} \quad \|R(x, \lambda)\|_{L_1} \leq \gamma(\lambda)e^{2a}.$$

Лемма 3. Если для какой-либо пары индексов $b_k = b_l$, то $q_{kl}(x) = q_{lk}(x) = 0$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что матрица $M^{-1}(x)$ имеет такую же структуру, что и $M(x)$, причем ровно с такими же по размеру и положению блоками, равными $M_j^{-1}(x)$. Тогда, разбивая матрицу $A(x)$ на соответствующие блоки, имеем

$$Q(x) = M^{-1}(x)(A(x) - D(x))M(x) = \begin{pmatrix} M_1^{-1}(x) & O & O & \dots & O \\ O & M_2^{-1}(x) & O & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & \dots & O & O & M_\nu^{-1}(x) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} O & A_{12}(x) & A_{13}(x) & \dots & A_{1\nu}(x) \\ A_{21}(x) & O & A_{23}(x) & \dots & A_{2\nu}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{\nu 1}(x) & \dots & A_{\nu \nu-1}(x) & O & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M_1(x) & O & O & \dots & O \\ O & M_2(x) & O & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & \dots & O & O & M_\nu(x) \end{pmatrix},$$

что и влечет после перемножения матриц утверждение леммы. \square

Положим $v_{jl}(x, \lambda) = q_{jl}(x) + r_{jl}(x, \lambda)$. Символом $(\pm)_{jk}$ будем обозначать величину, равную -1 при $j < k$ и 1 при $j \geq k$. Для записи остатков определим функции

$$(3.14) \quad v_{jkl}(s, x, \lambda) = (\pm)_{jk}(\pm)_{lk} \int q_{jl}(t) e^{(b_l - b_k)\lambda(p(t) - p(s)) + (b_j - b_k)\lambda(p(x) - p(t))} dt,$$

$$q_{jkl}(s, x, \lambda) = (\pm)_{jk}(\pm)_{lk} \int r_{jl}(t, \lambda) e^{(b_l - b_k)\lambda(p(t) - p(s)) + (b_j - b_k)\lambda(p(x) - p(t))} dt,$$

где пределы интегрирования равны (мы считаем, что интеграл равен нулю, если нижний предел больше верхнего)

$$(3.15) \quad \begin{cases} \text{от } x \text{ до } s, & \text{при } j, l < k; \\ \text{от } \max\{x, s\} \text{ до } 1, & \text{при } j < k \leq l; \\ \text{от } 0 \text{ до } \min\{x, s\}, & \text{при } l < k \leq j; \\ \text{от } s \text{ до } x, & \text{при } k \leq j, l. \end{cases}$$

Для оценки остатков в представлении (4.1) будем использовать функции

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \Upsilon(\lambda) &= \Upsilon_\infty(\lambda) = \max_{j,k,l,s,x} |v_{jkl}(s, x, \lambda)|, & \Upsilon(x, \lambda) &= \max_{j,k} |v_{jkk}(0, x, \lambda)|, \\ \Upsilon_\mu(\lambda) &= \max_{j,k,l} \left(\int_0^1 \int_0^1 |v_{jkl}(s, x, \lambda)|^\mu ds dx \right)^{1/\mu} + \max_{j,k} \left(\int_0^1 |v_{jkk}(0, x, \lambda)|^\mu dx \right)^{1/\mu}, \end{aligned}$$

где $\mu \in [1, \infty)$. Легко видеть, что $\Upsilon_\mu(\lambda) \leq \Upsilon(\lambda)$ и $\Upsilon(x, \lambda) \leq \Upsilon(\lambda)$ для любого $x \in [0, 1]$. Нам потребуется следующий аналог леммы Римана–Лебега.

Лемма 4. $\Upsilon(\lambda) \rightarrow 0$ при $\mathfrak{D} \ni \lambda \rightarrow \infty$. Кроме того, в области \mathfrak{D} выполнена оценка $\max_{j,k,l,s,x} |\varrho_{jkl}(s, x, \lambda)| \leq e^{2hp} \gamma(\lambda)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные индексы j, k, l и точки $s, x \in [0, 1]$. Прежде всего заметим, что при $l < k$ пределы интегрирования в (3.14) расставлены так, что $t \leq s$, а значит из (3.10) и условия (iii) следует

$$\operatorname{Re}(b_l - b_k)\lambda(p(t) - p(s)) < h(p(s) - p(t)).$$

При $l \geq k$ имеем $t \geq s$ и

$$\operatorname{Re}(b_l - b_k)\lambda(p(t) - p(s)) < h(p(t) - p(s)),$$

так что в любом случае

$$\operatorname{Re}(b_l - b_k)\lambda(p(t) - p(s)) < h|p(s) - p(t)| \leq hp.$$

(здесь и далее обозначаем $p = p(1)$.) Аналогично показываем, что

$$\operatorname{Re}(b_j - b_k)\lambda(p(x) - p(t)) < h|p(x) - p(t)| \leq hp.$$

Отсюда сразу следует оценка $\max_{j,k,l,s,x} |\varrho_{jkl}(s, x, \lambda)| \leq e^{2hp} \gamma(\lambda)$. Обратимся к функции $\Upsilon(\lambda)$. В силу леммы 3, $v_{jkl} \equiv 0$, если $b_j = b_l$. Если же $b_j \neq b_l$, то

$$|v_{jkl}(s, x, \lambda)| \leq \left| \int q_{jl}(t) \exp\{(b_l - b_k)\lambda(p(t) - p(s)) + (b_j - b_k)\lambda(p(x) - p(t))\} dt \right|,$$

где пределы в последнем интеграле расставлены согласно (3.15). Сделаем замену $\xi = p(t)$, $\xi \in [0, p]$, после которой интеграл примет вид

$$(3.17) \quad \left| \int \frac{q_{jl}(t(\xi))}{\rho(t(\xi))} e^{(b_l - b_k)\lambda(\xi - p(s)) + (b_j - b_k)\lambda(p(x) - \xi)} d\xi \right|.$$

Пределы интегрирования здесь расставлены, согласно правилу (3.15), с учетом того что неравенство $a \leq t \leq b$ эквивалентно $p(a) \leq \xi \leq p(b)$. Заметим, что функция $\frac{q_{jl}(t(\xi))}{\rho(t(\xi))}$ суммируема на отрезке $[0, p]$, поскольку

$$\int_0^p \frac{|q_{jl}(t(\xi))|}{\rho(t(\xi))} d\xi = \int_0^1 |q_{jl}(t)| dt.$$

Для данного $\varepsilon > 0$ подберем непрерывно дифференцируемую функцию $\tilde{q}_{jl}(\xi)$ так, что

$$\int_0^p \left| \frac{q_{jl}(t(\xi))}{\rho(t(\xi))} - \tilde{q}_{jl}(\xi) \right| d\xi < \varepsilon.$$

Поскольку вещественная часть выражения в показателе экспоненты в интеграле (3.17) по-прежнему не превосходит $2hp$, то интеграл (3.17) допускает оценку

$$(3.18) \quad \leq \varepsilon e^{2hp} + \left| \int \tilde{q}_{jl}(\xi) e^{(b_l - b_k)\lambda(\xi - p(s)) + (b_j - b_k)\lambda(p(x) - \xi)} d\xi \right|.$$

После интегрирования по частям в оставшемся интеграле придем к оценке

$$\leq \varepsilon e^{2hp} + \frac{e^{2hp}}{|b_l - b_j| \cdot |\lambda|} \left(2 \max_{0 \leq \xi \leq p} |\tilde{q}_{jl}(\xi)| + \int_0^p |\tilde{q}_{jl}(\xi)| d\xi \right) \leq 2\varepsilon e^{2hp}$$

при достаточно большом $|\lambda|$. □

4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Приступим к основной нашей цели — выводу асимптотических формул для фундаментальной матрицы системы (1.1).

Теорема 2. *Рассмотрим систему (1.1), коэффициенты которой удовлетворяют условиям (i) — (iv). Пусть $\tilde{\Gamma}_\kappa$ — один из секторов, определенных выше. Тогда в области $\mathfrak{D} = \{\lambda \in \tilde{\Gamma}_\kappa : |\lambda| > \lambda_0\}$ определена матрица $Y(x, \lambda)$ фундаментальной системы решений уравнения (1.1), удовлетворяющая асимптотическому условию*

$$(4.1) \quad Y(x, \lambda) = Y^0(x, \lambda) + \mathcal{A}(x, \lambda)\mathcal{E}(x, \lambda), \quad \text{где} \\ \mathcal{A}(x, \lambda) = (\alpha_{jk}(x, \lambda))_{j,k=1}^n, \quad \max_{j,k,x} |\alpha_{jk}(x, \lambda)| \leq C(\Upsilon(\lambda) + \gamma(\lambda)),$$

а функции $Y^0(x, \lambda)$ и $\mathcal{E}(x, \lambda)$ определены в (3.12). Если элементы матрицы $A(x) - D(x)$ суммируемы в степени $\mu' \in (1, \infty)$, то, положив $1/\mu + 1/\mu' = 1$, можем оценить

$$(4.2) \quad \max_{j,k} |\alpha_{jk}(x, \lambda)| \leq \Upsilon(x, \lambda) + C(\Upsilon_\mu(\lambda) + \gamma(\lambda)),$$

$$(4.3) \quad \max_{j,k} \left(\int_0^1 |\alpha_{jk}(x, \lambda)|^\mu dx \right)^{1/\mu} \leq C(\Upsilon_\mu(\lambda) + \gamma(\lambda)).$$

Замечание 6. С учетом леммы 4,

$$Y(x, \lambda) = (M(x, \lambda) + o(1)) \mathcal{E}(x, \lambda), \quad \tilde{\Gamma}_\kappa \ni \lambda \rightarrow \infty,$$

равномерно по $x \in [0, 1]$.

Доказательство теоремы 2. Шаг 1. Переход к системе интегральных уравнений. Напомним, что уравнения системы (1.1) занумерованы так, чтобы в области \mathfrak{D} выполнялись неравенства (3.10). Будем искать решение (1.3) в виде $Y(x, \lambda) = M(x)Z(x, \lambda)\mathcal{E}(x, \lambda)$. Тогда, с учетом равенств $\mathcal{E}' = \lambda\rho B\mathcal{E}$ и $M' = DM$,

$$M'Z\mathcal{E} + MZ'\mathcal{E} + MZ\mathcal{E}' = \lambda\rho BMZ\mathcal{E} + DMZ\mathcal{E} + (A - D + C)MZ\mathcal{E} \iff \\ MZ'\mathcal{E} + \lambda\rho MZB\mathcal{E} = \lambda\rho BMZ\mathcal{E} + (A - D + C)MZ\mathcal{E}.$$

Домножим это равенство на M^{-1} справа и на \mathcal{E}^{-1} слева и воспользуемся равенством $M^{-1}B = BM^{-1}$. В результате наше уравнение примет вид

$$Z' = \lambda\rho(BZ - ZB) + (Q + R)Z$$

(напомним, что $Q(x) := M^{-1}(x)(A(x) - D(x))M(x)$, $R(x, \lambda) := M^{-1}(x)C(x, \lambda)M(x)$). В координатной записи полученное уравнение имеет вид

$$(4.4) \quad z'_{jk}(x, \lambda) = \lambda(b_j - b_k)\rho(x)z_{jk}(x, \lambda) + \sum_{l=1}^n v_{jl}(x, \lambda)z_{lk}(x, \lambda).$$

Считая далее индекс k фиксированным, проведем интегрирование в (4.4), выбирая начальные условия $z_{jk}(1, \lambda) = 0$ для $j < k$, $z_{jk}(0, \lambda) = 0$ для $j > k$ и $z_{kk}(0, \lambda) = 1$:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} z_{jk}(x, \lambda) &= - \sum_l \int_x^1 v_{jl}(t, \lambda) e^{(b_j - b_k)\lambda(p(x) - p(t))} z_{lk}(t, \lambda) dt, \quad j < k, \\ z_{kk}(x, \lambda) - 1 &= \sum_l \int_0^x v_{kl}(t, \lambda) z_{lk}(t, \lambda) dt, \\ z_{jk}(x, \lambda) &= \sum_l \int_0^x v_{jl}(t, \lambda) e^{(b_j - b_k)\lambda(p(x) - p(t))} z_{lk}(t, \lambda) dt, \quad j > k. \end{aligned}$$

Обозначая через $V_k(\lambda)$ интегральный оператор в правой части этой системы, получим $\mathbf{z}_k = \mathbf{z}_k^0 + V_k \mathbf{z}_k$, где $\mathbf{z}_k^0 = (\delta_j^k)_{j=1}^n$ (через \mathbf{z}_k мы обозначаем k -тый столбец матрицы Z). Введем также операторы $Q_k(\lambda)$ и $R_k(\lambda)$, определенные правой частью (4.5) с заменой функций v_{jk} на q_{jk} и r_{jk} соответственно. Поскольку $v_{jk}(x, \lambda) = q_{jk}(x) + r_{jk}(x, \lambda)$, то $V_k = Q_k + R_k$.

Шаг 2. Оператор $(V_k(\lambda))^2$ — сжатие. Решение системы (4.5) мы будем искать в виде ряда $\mathbf{z}_k = \sum_{\nu=0}^{\infty} (V_k(\lambda))^{\nu} \mathbf{z}_k^0$, сходящегося в пространстве $(AC[0, 1])^n$. Для доказательства сходимости ряда и оценки остатков в (4.1) нам нужно оценить нормы операторов $Q_k(\lambda)$ и $R_k(\lambda)$. При этом, поскольку мы хотим получить также неравенства (4.2), наши оценки должны учитывать значение $\mu' \in [1, \infty]$. Отметим, что оценки для $\|Q_k(\lambda)\|$ и для $\|R_k(\lambda)\|$ имеют различную природу. Первые связаны с леммой Римана–Лебега, а вторые — с убыванием нормы $\|C(\cdot, \lambda)\|_{L_1[0, 1]} = \gamma(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Начнем с оценок

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \|R_k(\lambda)\|_{L_{\infty} \rightarrow AC} &\leq 2e^{hp+2a}\gamma(\lambda), \quad \|V_k(\lambda)\|_{L_{\infty} \rightarrow AC} \leq 2e^{hp+2a}(a + c), \\ \|Q_k(\lambda)\|_{L_{\mu} \rightarrow AC} &\leq 2e^{hp+2a}\|A(x) - D(x)\|_{L_{\mu'}}. \end{aligned}$$

Заметим, что пределы интегрирования в (4.5) расставлены так, что при $\lambda \in \tilde{\Gamma}_{\kappa}$

$$\operatorname{Re}(b_j - b_k)\lambda(p(x) - p(t)) < h|p(x) - p(t)| \leq hp.$$

Положим $\mathbf{f} \in L_{\infty}[0, 1]$, $\mathbf{g}_k = R_k(\lambda)\mathbf{f} \in AC[0, 1]$. Из (3.13) и (4.5) следует, что

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}_k(x, \lambda)\|_{AC} &= \sum_{j=1}^n \int_0^1 |g_{jk}(x, \lambda)| + |g'_{jk}(x, \lambda)| dx \leq \\ &\leq 2e^{hp} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \int_0^1 |r_{jl}(t, \lambda)| |f_l(t)| dt \leq 2e^{hp+2a}\gamma(\lambda)\|\mathbf{f}\|_{L_{\infty}} \end{aligned}$$

и первое неравенство в (4.6) доказано. Доказательство второго полностью аналогично. Остается оценить норму оператора $Q_k(\lambda)$. Положим $\mathbf{f} \in L_{\mu}[0, 1]$, $\mathbf{g}_k = Q_k(\lambda)\mathbf{f} \in AC[0, 1]$ и,

используя (3.13) и (4.5), получим

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}_k(x, \lambda)\|_{AC} &= \sum_{j=1}^n \int_0^1 |g_{jk}(x, \lambda)| + |g'_{jk}(x, \lambda)| dx \leq \\ &\leq 2e^{hp} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \int_0^1 |q_{jl}(t)| |f_l(t)| dt \leq 2e^{hp} \|Q(x)\|_{L_\mu} \|\mathbf{f}\|_{L_\mu}. \end{aligned}$$

Покажем, что при достаточно большом $|\lambda|$, $\lambda \in \mathfrak{D}$, оператор $(V_k(\lambda))^2$ является сжатием в $L_\infty[0, 1]$. Если $\mathbf{f} \in L_\infty$, $\mathbf{g}_k = V_k^2(\lambda)\mathbf{f}$, то

$$g_{jk}(x, \lambda) = \sum_{l, m=1}^n (\pm)_{jk} (\pm)_{lk} \int \left(v_{jl}(t, \lambda) e^{(b_j - b_k)\lambda(p(x) - p(t))} \int v_{lm}(s, \lambda) e^{(b_l - b_k)\lambda(p(t) - p(s))} f_m(s) ds \right) dt.$$

Внешние интегралы вычисляются по отрезку $[x, 1]$ при $j < k$, а при $j \geq k$ — по отрезку $[0, x]$. Внутренние интегралы — по $[t, 1]$ при $l < k$ и по $[0, t]$ при $l \geq k$. Переставив интегралы, получим

$$(4.7) \quad g_{jk}(x, \lambda) = \sum_{m=1}^n \int_0^1 \left(\sum_{l=1}^n v_{lm}(s, \lambda) (v_{jkl}(s, x, \lambda) + \varrho_{jkl}(s, x, \lambda)) \right) f_m(s) ds.$$

Согласно неравенству (3.13) и лемме 4,

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 |v_{lm}(s, \lambda) (v_{jkl}(s, x, \lambda) + \varrho_{jkl}(s, x, \lambda))| ds \leq (a + \gamma(\lambda)) e^{2a} (\Upsilon(\lambda) + \gamma(\lambda)) \rightarrow 0$$

при $\mathfrak{D} \ni \lambda \rightarrow \infty$. Тогда

$$\|(V_k(\lambda))^2 \mathbf{f}\|_{L_\infty} = \max_{j, x} |g_{jk}(x, \lambda)| \leq n^2 (a + \gamma(\lambda)) e^{2a} (\Upsilon(\lambda) + \gamma(\lambda)) \max_{m, s} |f_m(s)|.$$

Обозначив $C_0 = n^2(a + c)e^{2a}$, получим

$$(4.8) \quad \|(V_k(\lambda))^2\|_{L_\infty} \leq C_0 (\Upsilon(\lambda) + \gamma(\lambda)) \rightarrow 0 \quad \text{при } |\lambda| \rightarrow \infty,$$

т.е. оператор $(V_k(\lambda))^2$ в пространстве L_∞ — сжатие при больших $|\lambda|$.

Шаг 3. Итоговые оценки. Вернемся к системе (4.5). Представим ее решение в виде (пока формального) ряда

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{z}_k^0 + V_k(\lambda) \sum_{\nu=0}^{\infty} (V_k(\lambda))^\nu \mathbf{z}_k^0.$$

Из этой записи и из ограниченности оператора $V_k(\lambda)$, действующего из L_∞ в AC (ограниченность оператора доказана в (4.6)) видно, что достаточно доказать сходимость ряда по норме $L_\infty[0, 1]$. Для этого перепишем его в виде

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{z}_k^0 + V_k \mathbf{z}_k^0 + \sum_{\nu=0}^{\infty} (V_k(\lambda))^{2\nu} ((V_k(\lambda))^2 \mathbf{z}_k^0 + (V_k(\lambda))^3 \mathbf{z}_k^0).$$

Учитывая (4.8), увеличим число λ_0 так, чтобы при всех $\lambda \in \mathfrak{D}$ было выполнено $\|(V_k(\lambda))^2\|_{L_\infty} < 1/2$. Это гарантирует сходимость ряда в норме L_∞ и дает оценку

$$(4.9) \quad \|\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_k^0 - V_k(\lambda) \mathbf{z}_k^0\|_{L_\infty} \leq 2 \|(V_k(\lambda))^2 \mathbf{z}_k^0 + (V_k(\lambda))^3 \mathbf{z}_k^0\|_{L_\infty}.$$

Вычислим функцию $\tilde{\mathbf{z}}_k^1 = (\tilde{z}_{jk}^1(x, \lambda))_{j=1}^n = \mathbf{Q}_k(\lambda) \mathbf{z}_k^0$:

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \tilde{z}_{jk}^1(x, \lambda) &= - \int_x^1 q_{jk}(t, \lambda) e^{(b_j - b_k)\lambda(p(x) - p(t))} dt, & j < k, \\ \tilde{z}_{jk}^1(x, \lambda) &= \int_0^x q_{jk}(t, \lambda) e^{(b_j - b_k)\lambda(p(x) - p(t))} dt, & j \geq k. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем $\tilde{z}_{jk}^1(x, \lambda) = v_{jkk}(0, x, \lambda)$ и

$$(4.11) \quad \max_{1 \leq j, k \leq n} |\tilde{z}_{jk}^1(x, \lambda)| \leq \Upsilon(x, \lambda).$$

Отсюда следует оценки $\|\tilde{\mathbf{z}}_k^1\|_{L_\mu} \leq \Upsilon_\mu(\lambda)$ и

$$(4.12) \quad \|\mathbf{V}_k \mathbf{z}_k^0\|_{L_\mu} \leq \|\tilde{\mathbf{z}}_k^1\|_{L_\mu} + \|\mathbf{R}_k(\lambda) \mathbf{z}_k^0\|_{L_\infty} \leq C_1(\Upsilon_\mu(\lambda) + \gamma(\lambda)), \quad C = 2e^{hp+2a}.$$

Условимся дальше обозначать $\mathbf{z}_k^\nu = (\mathbf{V}_k)^\nu \mathbf{z}_k^0$. Теперь заметим, что

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{z}_k^2\|_{AC} &\leq \|\mathbf{Q}_k\|_{L_\mu \rightarrow AC} \|\mathbf{z}_k^1\|_{L_\mu} + \|\mathbf{R}_k\|_{L_\infty \rightarrow AC} \|\mathbf{z}_k^1\|_{L_\infty} \leq \\ &\leq C_1 \|\mathbf{Q}_k\|_{L_\mu \rightarrow AC} (\Upsilon_\mu(\lambda) + \gamma(\lambda)) + 2e^{hp+2a} \gamma(\lambda) \|\mathbf{V}_k\|_{L_\infty} \leq C_2 (\Upsilon_\mu(\lambda) + \gamma(\lambda)), \end{aligned}$$

где $C_2 = 4e^{hp+4a}(a + c + m)$, $m = \|\mathbf{A} - \mathbf{D}\|_{L_{\mu'}}$. Наконец,

$$(4.14) \quad \|\mathbf{z}_k^3\|_{L_\infty} \leq \|\mathbf{V}_k(\lambda)\|_{L_\infty} C_2 (\Upsilon_\mu(\lambda) + \gamma(\lambda)) \leq C_3 (\Upsilon_\mu(\lambda) + \gamma(\lambda)),$$

$C_3 = 8e^{3hp+6a}(a + c)(a + c + m)$. Подставляя полученные оценки в (4.9), получаем

$$(4.15) \quad \|\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_k^0 - \mathbf{z}_k^1\|_{L_\infty} \leq C_4 (\Upsilon_\mu(\lambda) + \gamma(\lambda)),$$

$C_4 = 2C_2 + 2C_3$, а учитывая (4.12),

$$(4.16) \quad \|\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_k^0\|_{L_\mu} \leq C_5 (\Upsilon_\mu(\lambda) + \gamma(\lambda)),$$

$C_5 = C_4 + 2e^{hp+2a}$. Оценки (4.3) следуют отсюда, после домножения матрицы \mathbf{Z} слева на $\mathbf{M}(x) \in AC[0, 1]$ (при этом константа в (4.3) равна $C = C_5 e^a$). Оценки (4.1) — частный случай (4.3) при $\mu = \infty$. Для доказательства (4.2) заметим, что

$$|\mathbf{z}_k^1(x, \lambda)| \leq |\tilde{\mathbf{z}}_k^1(x, \lambda)| + \|\mathbf{R}_k(\lambda) \mathbf{z}_k^0\|_{L_\infty} \leq \Upsilon(x, \lambda) + 2e^{hp+2a} \gamma(\lambda).$$

Отсюда и из (4.15) получаем (4.2). \square

Замечание 7. Если элементы матрицы \mathbf{C} — функции $c_{jk}(x, \lambda)$ голоморфны по параметру λ в области $\mathfrak{D}_{\kappa, \lambda_0}$, то функция $\mathbf{Y}(x, \lambda)$ также голоморфна в $\mathfrak{D}_{\kappa, \lambda_0}$ (как элемент пространства $(AC[0, 1])^{n^2}$).

Доказательство полностью аналогично доказательству замечания 3.

Замечание 8. Определитель матрицы $\mathbf{Y}(x, \lambda)$ имеет вид

$$\det \mathbf{Y}(x, \lambda) = \det \mathbf{Y}^0(x, \lambda) (\det \mathbf{M}(x) + o(1)) \neq 0$$

при $\lambda \in \mathfrak{D}_{\kappa, \lambda_0}$ при достаточно большом λ_0 , т.е. найденная нами $\mathbf{Y}(x, \lambda)$ действительно является фундаментальной матрицей решений системы (1.1) в \mathfrak{D} .

В теореме 2 мы, фактически, нашли лишь старший член в асимптотическом представлении матрицы $\mathbf{Y}(x, \lambda)$. Дадим несколько уточнений асимптотических формул (4.1)–(4.3).

Теорема 3. В условиях теоремы 2, в общей ситуации, когда $A(x) \in L_1[0, 1]$,

$$(4.17) \quad Y(x, \lambda) = M(x, \lambda)Z(x, \lambda)\mathcal{E}(x, \lambda), \quad \text{где} \quad Z(x, \lambda) = I + Z^1(x, \lambda) + Z^2(x, \lambda) + \mathcal{A}(x, \lambda),$$

$$\mathcal{A}(x, \lambda) = (\alpha_{jk}(x, \lambda))_{j,k=1}^n, \quad \max_{j,k,x} |\alpha_{jk}(x, \lambda)| \leq C(\Upsilon(\lambda) + \gamma(\lambda))^2,$$

$$(4.18) \quad Z(x, \lambda) = I + Z^1(x, \lambda) + \mathcal{A}(x, \lambda), \quad \text{где} \quad \max_{j,k} \|\alpha_{jk}(x, \lambda)\|_{AC} \leq C(\Upsilon + \gamma(\lambda)).$$

Если элементы матрицы $A(x) - D(x)$ суммируемы в степени $\mu' \in (1, \infty)$, то

$$(4.19) \quad Z(x, \lambda) = I + Z^1(x, \lambda) + \mathcal{A}(x, \lambda)), \quad \text{где} \quad \max_{j,k,x} |\alpha_{jk}(x, \lambda)| \leq C(\Upsilon_\mu(\lambda) + \gamma(\lambda)),$$

$$Z(x, \lambda) = I + Z^1(x, \lambda) + Z^2(x, \lambda) + Z^3(x, \lambda) + \mathcal{A}(x, \lambda)),$$

$$(4.20) \quad \text{где} \quad \max_{j,k} \|\alpha_{jk}(x, \lambda)\|_{L_\mu} \leq C(\Upsilon_\mu(\lambda) + \gamma(\lambda))^2.$$

$$Z(x, \lambda) = I + Z^1(x, \lambda) + Z^2(x, \lambda) + Z^3(x, \lambda) + Z^4(x, \lambda) + \mathcal{A}(x, \lambda)),$$

$$(4.21) \quad \text{где} \quad \max_{j,k} \|\alpha_{jk}(x, \lambda)\|_{AC} \leq C(\Upsilon_\mu(\lambda) + \gamma(\lambda))^2.$$

Здесь через $Z^\nu(x, \lambda)$ мы обозначаем матрицы, составленные из столбцов $\mathbf{z}_k^\nu(x, \lambda)$.

Доказательство. Первые три утверждения следуют из, полученных при доказательстве теоремы 2, оценок. Для вывода (4.17) достаточно неравенств (4.12) и (4.8), (4.19) следует из (4.15). Записав равенство

$$\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_k^0 - V_k \mathbf{z}_k^0 = V_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_k^0)$$

и воспользовавшись (4.16) для $\mu = \infty$ и (4.6), приходим к (4.18). Для доказательства последних двух утверждений требуются дополнительные рассуждения.

Покажем, что при $\mu' > 1$ сжатием является и оператор $(Q_k(\lambda))^2$, действующий из L_∞ уже в L_μ . Возьмем произвольную функцию $\mathbf{f} \in L_\infty$, положим $\mathbf{g}_k = (Q_k(\lambda))^2 \mathbf{f}$ и, так же, как и для оператора $(V_k(\lambda))^2$, приходим к равенствам (4.7) (с заменой $v_{lm}(s, \lambda)$ на $q_{lm}(s)$). Тогда

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 \left| \int_0^1 q_{lm}(s) v_{jkl}(s, x, \lambda) ds \right|^\mu dx \right)^{\frac{1}{\mu}} &\leq \\ &\leq \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |q_{lm}(s)|^{\mu'} ds \right)^{\frac{\mu}{\mu'}} \int_0^1 |v_{jkl}(s, x, \lambda)|^\mu ds \right)^{\frac{1}{\mu}} \leq \|q_{lm}\|_{L_{\mu'}} \Upsilon_\mu(\lambda), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |g_{jk}(x, \lambda)|^\mu dx &\leq n^{2/\mu'} \|\mathbf{f}\|_{L_\infty}^\mu \sum_{l,m=1}^n \int_0^1 \left| \int_0^1 q_{lm}(s) v_{jkl}(s, x, \lambda) ds \right|^\mu dx \leq \\ &\leq n^{2/\mu'} \|\mathbf{f}\|_{L_\infty}^\mu \left(\|Q(x)\|_{L_{\mu'}} \Upsilon_\mu(\lambda) \right)^\mu, \end{aligned}$$

откуда $\|\mathbf{g}_k\|_{L_\mu} \leq n^2 \|Q(x)\|_{L_{\mu'}} \Upsilon_\mu(\lambda) \|\mathbf{f}\|_{L_\infty}$, т.е.

$$(4.22) \quad \|(Q_k(\lambda))^2\|_{L_\infty \rightarrow L_\mu} \leq n^2 e^{2a} \|A(x) - D(x)\|_{L_{\mu'}} \Upsilon_\mu(\lambda).$$

Положив $C_6 = n^2 e^{2a} \max\{a + c, \|A(x) - D(x)\|_{L_{\mu'}}\}$, имеем $\|(Q_k(\lambda))^2\|_{L_\infty \rightarrow L_\mu} \leq C_6 \Upsilon_\mu(\lambda)$. В качестве следствия получаем оценку

$$\begin{aligned} \|(V_k(\lambda))^2\|_{L_\infty \rightarrow L_\mu} &\leq \|(Q_k(\lambda))^2\|_{L_\infty \rightarrow L_\mu} + \|Q_k(\lambda)R_k(\lambda)\|_{L_\infty \rightarrow L_\mu} + \|R_k(\lambda)Q_k(\lambda)\|_{L_\infty \rightarrow L_\mu} + \\ &+ \|(R_k(\lambda))^2\|_{L_\infty \rightarrow L_\mu} \leq C_6 \Upsilon_\mu(\lambda) + 8e^{2hp+2a}\|A(x) - D(x)\|_{L_{\mu'}}\gamma(\lambda) + 4e^{2hp}\gamma^2(\lambda), \end{aligned}$$

т.е. при достаточно больших $|\lambda| > \lambda_0$, когда $\gamma(\lambda) < 1$,

$$(4.23) \quad \|(V_k(\lambda))^2\|_{L_\infty \rightarrow L_\mu} \leq C_7(\Upsilon_\mu(\lambda) + \gamma(\lambda)).$$

В (4.13) и (4.14) мы оценили $\|\mathbf{z}_k^2\|_{L_\infty}$ и $\|\mathbf{z}_k^3\|_{L_\infty}$ величиной $C(\Upsilon_\mu(\lambda) + \gamma(\lambda))$. Остается учесть, что $\|(V_k(\lambda))^2\|_{L_\infty} \leq 1/2$, а значит

$$\left\| \sum_{\nu=0}^{\infty} (V_k(\lambda))^{2\nu} (\mathbf{z}_k^2 + \mathbf{z}_k^3) \right\|_{L_\infty} \leq 2\|\mathbf{z}_k^2 + \mathbf{z}_k^3\|_{L_\infty} \leq C_8(\Upsilon_\mu(\lambda) + \gamma(\lambda)).$$

Применяя оператор $(V_k(\lambda))^2$ и учитывая (4.23), получим

$$\left\| \sum_{\nu=1}^{\infty} (V_k(\lambda))^{2\nu} (\mathbf{z}_k^2 + \mathbf{z}_k^3) \right\|_{L_\mu} \leq C_9(\Upsilon_\mu(\lambda) + \gamma(\lambda))^2$$

и (4.20) доказано. Для доказательства (4.21) оценим вначале $\|\mathbf{z}_k^5\|_{L_\infty}$. Раскладывая оператор V_k в сумму $V_k = Q_k + R_k$, представим $(V_k)^5$ в виде суммы тридцати двух слагаемых, каждое из которых есть произведение четырех операторов. Слагаемые, в которые множитель R_k входит два и более раз оцениваются величиной $C\gamma^2(\lambda)$ (см. (4.6)). Остальные слагаемые оценим, используя (4.6), (4.22) и (4.11):

$$\begin{aligned} \|(Q_k)^5 \mathbf{z}_k^0\|_{AC} &\leq \|Q_k\|_{L_\mu \rightarrow AC} \|(Q_k)^2\|_{L_\infty \rightarrow L_\mu} \|Q_k\|_{L_\mu \rightarrow L_\infty} \|\tilde{\mathbf{z}}_k^1\|_{L_\mu} \leq C\Upsilon_\mu^2(\lambda), \\ \|(Q_k)^4 R_k \mathbf{z}_k^0\|_{AC} &\leq \|(Q_k)^2\|_{L_\mu \rightarrow AC} \|(Q_k)^2\|_{L_\infty \rightarrow L_\mu} \|R_k\|_{L_\infty} \leq C\Upsilon_\mu(\lambda)\gamma(\lambda), \\ \|R_k Q_k \mathbf{z}_k^0\|_{AC} &\leq \|R_k\|_{L_\infty \rightarrow AC} \|\tilde{\mathbf{z}}_k^1\|_{L_\infty} \leq C\Upsilon_\mu(\lambda)\gamma(\lambda). \end{aligned}$$

Таким образом, $\|\mathbf{z}_k^5\|_{AC} \leq C(\Upsilon_\mu(\lambda) + \gamma(\lambda))^2$. Применяя оператор V_k видим, что такая же оценка верна и для \mathbf{z}_k^6 и \mathbf{z}_k^7 . Пользуясь (4.6) и (4.8), увеличим λ_0 настолько, что

$$\|(V_k(\lambda))^3\|_{AC} \leq \|V_k\|_{L_\infty \rightarrow AC} \|(V_k)^2\|_{L_\infty} \leq \frac{1}{2}.$$

Теперь (4.21) следует из оценки

$$\left\| \sum_{\nu=0}^{\infty} (V_k(\lambda))^{3\nu} (\mathbf{z}_k^5 + \mathbf{z}_k^6 + \mathbf{z}_k^7) \right\|_{AC} \leq 2\|\mathbf{z}_k^5 + \mathbf{z}_k^6 + \mathbf{z}_k^7\|_{AC} \leq C(\Upsilon_\mu(\lambda) + \gamma(\lambda))^2.$$

□

Теоремы 2 и 3 дают оценки остаточных членов в асимптотическом представлении матрицы $Y(x, \lambda)$ в терминах функций $\Upsilon(\lambda)$, $\Upsilon_\mu(\lambda)$, $\Upsilon(x, \lambda)$ и $\gamma(\lambda)$. В общей ситуации, когда выполнены условия (i)–(iv) на коэффициенты системы (1.1) эти функции убывают к нулю при $\Re \lambda \rightarrow \infty$ (см. лемму 4). Характер стремления к нулю функции $\gamma(\lambda)$ целиком определяется степенью убывания функций $c_{ij}(\cdot, \lambda)$. Как видно из теоремы 1, для случая операторов высокого порядка имеем $\gamma(\lambda) = O(|\lambda|^{-1})$. Убывание к нулю функций $\Upsilon(\lambda)$, $\Upsilon_\mu(\lambda)$ и $\Upsilon(x, \lambda)$ определяется «регулярностью» функции $\rho(x)$ и элементов матрицы $A(x) - D(x)$. При повышении суммируемости $\mu' \in (1, 2]$ этих функций, можно оценивать норму $\Upsilon_\mu(\lambda)$ и $\Upsilon(x, \lambda)$ в пространствах Харди H^μ . При повышении гладкости, выраженной в оценках на

модуль непрерывности или на норму в пространствах Бесова функции $\rho(x)$ и элементов матрицы $A(x) - D(x)$, можно давать оценки на скорость убывания функций $\Upsilon(\lambda)$, $\Upsilon_\mu(\lambda)$ и $\Upsilon(x, \lambda)$. Соответствующие теоремы будут приведены в следующей статье авторов.

Теперь мы получим асимптотические формулы для решений дифференциального уравнения $l(y) = \lambda^n \varrho(x)y$ порядка $n = 2m$ вида со спектральным параметром в правой части. Функцию $\varrho(x)$ будем предполагать абсолютно непрерывной и положительной на $[0, 1]$. Будем считать, что дифференциальное выражение $l(y)$ уже приведено к нормальному виду (2.3). Далее без напоминаний пользуемся обозначениями, введенными выше. Согласно теореме 1, матрица В итоговой системы равна $B = \text{diag}\{\omega_0, \dots, \omega_{n-1}\}$. Вначале опишем систему секторов Γ_k , границы которых определяются уравнениями $\text{Re}(\omega_j \lambda) = \text{Re}(\omega_k \lambda)$, $0 \leq j \neq k \leq n-1$. Учитывая явный вид чисел ω_j , эти уравнения легко решаются (решение тригонометрических уравнения мы здесь опускаем). Конечный результат следующий: при $n = 2$ плоскость разбивается на два сектора — верхнюю и нижнюю полуплоскость; при $n > 2$ плоскость разбивается на $2n$ секторов вида

$$\Gamma_k = \left\{ \lambda : \frac{\pi(k-1)}{n} \leq \arg \lambda \leq \frac{\pi k}{n} \right\}, \quad k = 1, \dots, 2n.$$

Как и ранее, расширим каждый сектор Γ_k , сдвинув его на r вдоль биссектрисы. Полученные секторы обозначаем $\tilde{\Gamma}_k$.

Теорема 4. Пусть $l(y)$ — дифференциальное выражение вида (2.3), для коэффициентов которого выполнены условия (2.2). Пусть к тому же функции $\tau_0(x)$ и $\varrho(x)$ абсолютно непрерывны и положительны на $[0, 1]$. Пусть $\tilde{\Gamma}_\kappa$ — один из секторов, определенных выше. Тогда в этом секторе уравнение $l(y) = \lambda^n \varrho(x)y$ имеет систему фундаментальных решений $y_k(x, \lambda)$, $k = 1, \dots, n$, для каждого из которых справедливо асимптотическое представление

$$(4.24) \quad y_k(x) = e^{\omega_{k-1} \lambda p(x)} \left[\varrho^{\frac{1-n}{2n}}(x) \tau_0^{-\frac{1}{2n}}(x) \exp \left\{ \frac{2i}{n} \int_0^x \frac{\sigma_0(t)}{\tau_0(t)} dt \right\} + \zeta_{1k}(x, \lambda) \right].$$

При этом для квазипроизводных порядка $j = 1, \dots, m-1$ этих функций также справедливы асимптотические представления

$$(4.25) \quad y_k^{[j]}(x) = \lambda^j e^{\omega_{k-1} \lambda p(x)} \left[(\omega_{k-1})^j \varrho^{\frac{2j-n+1}{2n}}(x) \tau_0^{-\frac{1+2j}{2n}}(x) \exp \left\{ \frac{2i}{n} \int_0^x \frac{\sigma_0(t)}{\tau_0(t)} dt \right\} + \zeta_{jk}(x, \lambda) \right],$$

а для квазипроизводных порядка $j = m, \dots, n-1$ — представления

$$(4.26) \quad y_k^{[j]}(x) = \lambda^j e^{\omega_{k-1} \lambda p(x)} \left[(\omega_{k-1})^j \varrho^{\frac{2j-n+1}{2n}}(x) \tau_0^{1-\frac{1+2j}{2n}}(x) \exp \left\{ \frac{2i}{n} \int_0^x \frac{\sigma_0(t)}{\tau_0(t)} dt \right\} + \zeta_{jk}(x, \lambda) \right].$$

Остатки в этих представлениях допускают при $\tilde{\Gamma}_\kappa \ni \lambda \rightarrow \infty$ оценку

$$(4.27) \quad \max_{j,k} |\zeta_{j,k}(x, \lambda)| \leq C(\Upsilon(x, \lambda) + \Upsilon_\mu(\lambda) + |\lambda|^{-1}),$$

$$\max_{j,k} \|\zeta_{j,k}(x, \lambda)\|_{L_\mu} \leq C(\Upsilon_\mu(\lambda) + |\lambda|^{-1}),$$

где $1/\mu + 1/\mu' = 1$, а μ' — максимальная общая степень суммируемости функций $\varrho'(x)$, $\tau_0'(x)$, $\tau_1^{(-1)}(x)$ и $\sigma_0(x)$. Функции $\Upsilon_\mu(\lambda)$ и $\Upsilon(x, \lambda)$ определяются формулами (3.16) и (3.14), где $q_{jl}(x) = a_{jl}(x)$, матрица $A(x)$ определена в (2.10).

Доказательство. Положим $\mathbf{u}(x) = (u_j(x))_{j=1}^n$, $u_j(x) = \lambda^{1-j} y^{[j-1]}(x)$, и $\mathbf{y}(x) = W^{-1}(x)\mathbf{u}(x)$, где матрицы $W(x)$ и $W^{-1}(x)$ определены в (2.8). Тогда для вектора $\mathbf{y}(x)$ выполнена система (2.9) с матрицей $A(x)$, определенной в (2.10). Применим теорему 2 для поиска асимптотического представления фундаментальной матрицы $Y(x, \lambda)$ этой системы. Вначале найдем главный член разложения — матрицу $Y^0(x, \lambda)$. Заметим, что все числа $b_j = \omega_{j-1}$, $j = 1, \dots, n$, попарно различны, а значит (см. замечание 4) матрица $M(x)$ диагональна. Более того, из (2.10) видно, что все элементы a_{jj} , $1 \leq j \leq n$, равны между собой и

$$\int_0^x a_{jj}(t) dt = \frac{1-n}{2n} \ln \varrho(x) - \frac{1}{2n} \ln \tau_0(x) + \frac{2i}{n} \int_0^x \frac{\sigma_0(t)}{\tau_0(t)} dt,$$

а значит

$$Y^0(x, \lambda) = \varrho^{\frac{1-n}{2n}}(x) \tau_0^{-\frac{1}{2n}}(x) e^{\frac{2i}{n} \int_0^x \frac{\sigma_0(t)}{\tau_0(t)} dt} \mathcal{E}(x, \lambda), \quad \mathcal{E}(x, \lambda) = \text{diag} \{e^{\omega_0 \lambda p(x)}, \dots, e^{\omega_{n-1} \lambda p(x)}\}.$$

Теперь воспользуемся теоремой 2 и найдем $Y(x, \lambda) = Y^0(x, \lambda) + \mathcal{A}(x, \lambda)\mathcal{E}(x, \lambda)$, причем для элементов матрицы \mathcal{A} выполнены оценки (4.2) и (4.3). Остается сделать обратную замену, положив $U(x, \lambda) = W(x)Y(x, \lambda)$. Перемножив матрицы, получим

$$U(x, \lambda) = U^0(x, \lambda) + W(x)\mathcal{A}(x, \lambda), \quad \text{где}$$

$$u_{jk}^0(x, \lambda) = \varrho^{\frac{1-n}{2n}}(x) \tau_0^{-\frac{1}{2n}}(x) e^{\omega_{k-1} \lambda p(x) + \frac{2i}{n} \int_0^x \frac{\sigma_0(t)}{\tau_0(t)} dt} (\omega_{k-1} \rho(x))^{j-1} \cdot \begin{cases} 1, & j \leq m \\ \tau_0, & j > m \end{cases}.$$

Подстановка $j = 1$ дает (4.24), а при $2 \leq j \leq n$ получаем равенства (4.25) и (4.26), поскольку $y_k^{[j-1]}(x) = \lambda^{j-1} u_{jk}(x)$. Неравенства (4.2) и (4.3), справедливые для элементов матрицы $\mathcal{A}(x, \lambda)$, влекут оценки (4.27) для функций $\zeta_{jk}(x, \lambda)$ — элементов матрицы $W(x)\mathcal{A}(x, \lambda)$, поскольку матрица $W(x)$ абсолютно непрерывна и не зависит от λ . \square

Выпишем отдельно результат для случая $n = 2$. Это можно сделать непосредственно, взяв $n = 2$ в утверждении теоремы 4, но для наглядности мы кратко повторим основные моменты ее доказательства для этого случая. Кроме того, явный вид матрицы $A(x)$ позволит нам несколько ослабить условия теоремы 4. Итак, при $n = 2$ исследуемое уравнение имеет вид

$$(4.28) \quad l(y) = -(\tau_0(x)y')' + i(\sigma_0(x)y)' + i\sigma_0(x)y' + \tau_1(x)y = \lambda^2 \varrho(x)y,$$

где

$$(4.29) \quad \tau_0(x), \varrho(x) \in W_1^1[0, 1], \quad \tau_0(x) > 0, \quad \varrho(x) > 0, \quad \tau_1(x) = \mathcal{T}_1'(x), \quad \mathcal{T}_1(x), \sigma_0(x) \in L_2[0, 1].$$

Переход к системе осуществляется заменой

$$u_1(x) = y(x), \quad u_2(x) = \lambda^{-1} y^{[1]}(x) = \lambda^{-1} \tau_0(x)(y'(x) - f_{1,1}(x)y),$$

где элементы матрицы $F(x)$ равны

$$\begin{aligned} f_{1,1}(x) &= \frac{\mathcal{T}_1(x) + i\sigma_0(x)}{\tau_0(x)}, & f_{1,2}(x) &= \frac{1}{\tau_0(x)}, \\ f_{2,1}(x) &= -\frac{\mathcal{T}_1^2(x) + \sigma_0^2(x)}{\tau_0(x)}, & f_{2,2}(x) &= \frac{-\mathcal{T}_1(x) + i\sigma_0(x)}{\tau_0(x)}. \end{aligned}$$

Сама система относительно вектора $\mathbf{u}(x) = (u_1(x), u_2(x))^t$ имеет вид

$$\mathbf{u}'(x) = \begin{pmatrix} f_{1,1}(x) & \frac{\lambda}{\tau_0(x)} \\ -\lambda \varrho(x) + \frac{f_{2,2}(x)}{\lambda} & f_{2,1}(x) \end{pmatrix} \mathbf{u}(x),$$

а после замены

$$\mathbf{y} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{\sqrt{\varrho\tau_0}} \\ 1 & \frac{i}{\sqrt{\varrho\tau_0}} \end{pmatrix} \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\sqrt{\varrho\tau_0} & -i\sqrt{\varrho\tau_0} \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

приобретает вид (здесь $\rho(x) = \varrho(x)/\tau_0(x)$)

$$\mathbf{y}' = \lambda \sqrt{\rho(x)} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} -\frac{(\varrho\tau_0)'}{4\varrho\tau_0} + \frac{i\sigma_0}{\tau_0} & \frac{(\varrho\tau_0)'}{4\varrho\tau_0} + \frac{\mathcal{T}_1}{\tau_0} \\ \frac{(\varrho\tau_0)'}{4\varrho\tau_0} + \frac{\mathcal{T}_1}{\tau_0} & -\frac{(\varrho\tau_0)'}{4\varrho\tau_0} + \frac{i\sigma_0}{\tau_0} \end{pmatrix} \mathbf{y} + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{i(\mathcal{T}_1^2 + \sigma_0^2)}{\tau_0^{3/2} \varrho^{1/2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

Следствие 2. Пусть $\tilde{\Gamma}_1 = \{\lambda : \operatorname{Im} \lambda > -h\}$, $\tilde{\Gamma}_2 = \{\lambda : \operatorname{Im} \lambda < h\}$, где $h > 0$ произвольно. При условии (4.29) уравнение (4.28) имеет в $\tilde{\Gamma}_1$ такую пару линейно независимых решений $y_{\pm}(x, \lambda)$, что при $\tilde{\Gamma}_1 \ni \lambda \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические представления

$$y_{\pm}(x, \lambda) = e^{\pm i\lambda p(x)} \left[\varrho^{-\frac{1}{4}}(x) \tau_0^{-\frac{1}{4}}(x) e^{i \int_0^x \frac{\sigma_0(t)}{\tau_0(t)} dt} + \zeta_{\pm}(x, \lambda) \right], \quad p(x) = \int_0^x \varrho^{\frac{1}{2}}(t) \tau_0^{-\frac{1}{2}}(t) dt,$$

$$y_{\pm}^{[1]}(x, \lambda) = \pm i\lambda e^{\pm i\lambda p(x)} \left[\varrho^{\frac{1}{4}}(x) \tau_0^{\frac{1}{4}}(x) e^{i \int_0^x \frac{\sigma_0(t)}{\tau_0(t)} dt} + \zeta_{\pm,1}(x, \lambda) \right],$$

где остатки ζ_{\pm} и $\zeta_{\pm,1}$ подчинены оценкам

$$\|\zeta(\cdot, \lambda)\|_{L_{\infty}} \leq C (\Upsilon(\lambda) + |\lambda|^{-1}).$$

Если функции $(\varrho(x)\tau_0(x))'$ и $\mathcal{T}_1(x)$ суммируемы в степени $\mu' \in [1, \infty]$, то⁴

$$\|\zeta(\cdot, \lambda)\|_{L_{\mu}} \leq C (\Upsilon_{\mu}(\lambda) + |\lambda|^{-1}), \quad |\zeta(x, \lambda)| \leq \Upsilon(x, \lambda) + C (\Upsilon_{\mu}(\lambda) + |\lambda|^{-1}).$$

В точности такое же утверждение (с другой парой функций $y_{\pm}(x, \lambda)$) справедливо в $\tilde{\Gamma}_2$.

Замечание 9. Непосредственный вид матрицы системы позволяет несколько ослабить условия на коэффициенты дифференциального выражения (4.28). Вместо требования $\sigma_0, \mathcal{T}_1 \in L_2[0, 1]$ достаточно выполнения условий $\sigma_0, \mathcal{T}_1 \in L_1[0, 1]$, $\sigma_0^2 + \mathcal{T}_1^2 \in L_1[0, 1]$.

Отметим, что полученные асимптотические представления полностью совпадают с результатами недавней работы [29]. В этой работе был рассмотрен случай $\mu' = 1$, а относительно коэффициентов системы были сделаны следующие предположения $\varrho, \tau_0 \in \operatorname{AC}[0, 1]$, $\varrho, \tau > 0$, $\sigma_0 \in L_1[0, 1]$, $i\sigma_0 + \mathcal{T}_1 \in L_2[0, 1]$, $\sigma_0(i\sigma_0 + \mathcal{T}_1) \in L_1[0, 1]$, $\rho'(i\sigma_0 + \mathcal{T}_1) \in L_1[0, 1]$, $\tau_0'(i\sigma_0 + \mathcal{T}_1) \in L_1[0, 1]$. Легко видеть, что

$$\begin{cases} \sigma_0 \in L_1[0, 1] \\ i\sigma_0 + \mathcal{T}_1 \in L_2[0, 1] \\ \sigma_0(i\sigma_0 + \mathcal{T}_1) \in L_1[0, 1] \end{cases} \iff \begin{cases} \sigma_0 \in L_1[0, 1] \\ i\sigma_0 + \mathcal{T}_1 \in L_2[0, 1] \\ \sigma_0^2 + \mathcal{T}_1^2 \in L_1[0, 1] \end{cases} \implies \begin{cases} \sigma_0 \in L_1[0, 1] \\ \mathcal{T}_1 \in L_1[0, 1] \\ \sigma_0^2 + \mathcal{T}_1^2 \in L_1[0, 1] \end{cases},$$

так что с учетом замечания 9, мы распространяем результат этой работы на более широкий класс дифференциальных выражений. Дополнительные условия, возникшие в работе [29] объясняются использованием замены переменной $\xi = p(x)$ и применением другого метода для доказательства основной теоремы. Отметим еще, что в работах авторов [18]

⁴Напомним, что в любом случае $\mathcal{T}_1(x) \in L_2[0, 1]$, так что условие $\mathcal{T}_1 \in L_{\mu'}[0, 1]$ содержательно только при $\mu' > 2$.

(для случая $l(y) = -y'' + \tau_1 y$) и [30] (для системы Дирака) применялся еще один метод — метод «угла Прюфера». Результаты об асимптотическом поведении ФСР, полученные в этих работах совпадают с (4.2) и (4.3) (в случае оператора Штурма–Лиувилля параметр μ выбирался равным 2, а для системы Дирака была рассмотрена шкала $\mu \in [2, \infty]$). В [18], однако, кроме «короткой» асимптотики для собственных значений и собственных функций, была (для случая краевых условий Дирихле) получена и «длинная» асимптотика, основанная на асимптотическом представлении (4.21). При этом в итоговый ответ не вошли слагаемые, порождаемые функциями Z^3 и Z^4 , а от функции Z^2 вошло только одно слагаемое. Причины этого явления спрятаны довольно глубоко и состоят в том, что, хотя сами функции $\|Z^j(\cdot, \lambda)\|_{L_2}$, $j = 3, 4$, не оцениваются величиной $\Upsilon_2^2(\lambda)$, но нормы этих функций в пространстве Харди $H^1(\tilde{\Gamma})$ допускают уже такие же по порядку оценки, как и $\|\Upsilon_2^2(\lambda)\|$. Подробный анализ этого будет проведен в следующей работе авторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Coddington, N. Levinson *Theory of ordinary differential equations*, New York, Toronto, London, 1955.
- [2] G. D. Birkhoff, “On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **9** (1908), 21–231.
- [3] G. D. Birkhoff, “Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **9** (1908), 373–395.
- [4] O. Perron, “Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reel ist”, *Journ. f. reine u. angew. Math.*, **142**, **143** (1913).
- [5] J. D. Tamarkin, *On some general problems of the theory of ordinary linear differential operators and on expansion of arbitrary functions into series*, Petrograd, 1917.
- [6] J. D. Tamarkin, “Some general problems of the theory of linear differential equations and expansions of an arbitrary functions in series of fundamental functions”, *Math. Zeitschrift*, **27**:1 (1928), 1–54.
- [7] G. D. Birkhoff, R. E. Langer, “The boundary problems and developments associated with a system of ordinary differential equations of the first order”, *Proc. Am. Acad. Arts Sci.*, **58** (1923), 49–128.
- [8] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.
- [9] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Киев: Наукова думка, 1977.
- [10] R. O. Hryniv, Ya. V. Mykytyuk, “Transformation operators with singular potentials”, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **7** (2004), 119–149.
- [11] S. Albeverio, R. O. Hryniv, Ya. V. Mykytyuk, “Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials”, *Russian J. Math. Phys.*, **12**:4 (2005), 406–423.
- [12] И. М. Рапопорт, *О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений*, Изд-во Акад. Наук Укр. ССР, Киев, 1954.
- [13] А. И. Вагабов, “Об уточнении асимптотической теоремы Тамаркина”, *Дифференц. уравн.*, **29**:1 (1993), 41–49.
- [14] V. S. Rykhlov, “Asymptotical formulas for solutions of linear differential systems of the first order”, *Result. Math.*, **36** (1999), 342–353.
- [15] А. И. Вагабов, “Об асимптотике по параметру решений дифференциальных систем с коэффициентами из класса L_q ”, *Дифференц. уравн.*, **46**:1 (2010), 16–22.
- [16] M. M. Malamud, L. L. Oridoroga, “On the completeness of the system of root vectors for first-order systems”,
- [17] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов А. А., “Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами”, *Матем. заметки*, **66**:6 (1999), 897–912.
- [18] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов А. А., “Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами — распределениями”, *Труды Московского матем. общества*, **64** (2003), 159–219.
- [19] А. А. Шкаликов, В. Т. Плиев, “Компактные возмущения сильно демпфированных пучков операторов”, *Матем. заметки*, **45**:2 (1989), 118–128.
- [20] C. Bennewitz, “Spectral asymptotics for Sturm–Liouville equations”, *Proc. London Math. Soc.* **59**:2 (1989), 294–338.

- [21] A. Fleige, “Spectral theory of indefinite Krein–Weyl–Titchmarsh differential operators”, *Mathematical Research*, **98**, Akademie Verlag, Berlin, 1996.
- [22] A. Zettl, “Sturm–Liouville Theory”, *Math. Surv. and Mon.* **121**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [23] J. Behrndt, F. Philipp, C. Trunk, “Bounds on the non-real spectrum of differential operators with indefinite weights”, *Math. Ann.* **357** (2013), 185–213.
- [24] R. Kh. Amirov, I. M. Guseinov, “Some classes of Dirac operators with singular potentials”, *Diff. Uravn.*, **40**:7 (2004), 999–1001 (2004).
- [25] K. A. Мирзоев, А. А. Шкаликов, “Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами — распределениями”, *Матем. заметки* **99**:5 (2016), 788–793.
- [26] F. Atkinson, W. Everitt, A. Zettl, “Regularization of a Sturm–Liouville problem with an interior singularity using quasi-derivatives”, *Diff. Integr. Eq.*, **1**:2 (1988), 213–221.
- [27] W. Everitt, “A note on linear ordinary quasi-differential equations”, *Proc. Math. Soc. Edinburg, Sect.A.*, **101**:1–2 (1985), 1–14.
- [28] В. И. Богачев, О. Г. Смолянов, *Действительный и функциональный анализ: Университетский курс*, М.-Ижевск, 2009.
- [29] A. A. Shkalikov, V. E. Vladykina, to appear.
- [30] A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov, “The Dirac Operator with Complex-Valued Summable Potential”, *Math. Notes*, **96**:5 (2014), 777–810.